

Replicación de Características Superficiales por medio de la Teoría Fractal

Juan Carlos Rojas Garnica^{1,2}, Jorge Bedolla Hernández³, Dariusz Szwedowicz Wasik¹

Fecha de recepción: 29 de marzo de 2012 – Fecha de aprobación: 26 noviembre de 2012

RESUMEN

En este trabajo se presenta un método para la replicación gráfica de características superficiales de elementos mecánicos mediante el uso de la teoría fractal. Se parte de la obtención del espectro de densidad superficial, el cual se obtiene mediante la medición de la variación de alturas en diferentes zonas de la superficie muestra. A partir de este último se obtienen las amplitudes que se aplican en la función periódica exponencial que replica la superficie. Este método puede aplicarse al número de escalas que se requiera para la definición completa de componentes de ondulaciones y rugosidades de la superficie. Los resultados obtenidos confirman que el método es una alternativa sencilla de replicación sin importar el tamaño y número de escalas en la superficie. Sin embargo, tiene como limitantes a la resolución de las mediciones superficiales y al cumplimiento de la auto-similitud fractal.

Palabras clave: Asperezas, replicación superficial, teoría fractal, densidad superficial, multi-escalas.

Replication of Surface Characteristics through Fractal Theory

ABSTRACT

This paper shows a method for graphical replication of surface features of mechanical elements using fractal theory. It is based on obtaining the surface density spectrum. The measurement of heights, in different areas of the sample surface, gives the surface density spectrum. The amplitudes applied to the exponential periodic function that replicates the surface are obtained through surface density spectrum. The proposed method can be applied to the complete set of scales required for the definition of waviness and roughness in the analyzed surface. The results obtained indicate that the presented method is a simple alternative replication regardless of the size and number of scales on the surface. But it is limited by the resolution of surface measurements and by the compliance with the self-similar fractal.

Keywords: Roughness, surface replication, fractal theory, surface density, multi-scales.

¹ Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico–CENIDET, Interior internado Palmira s/n, Cuernavaca, Morelos.

² Universidad Tecnológica de Puebla-UTP, Antiguo Camino a la Resurrección 1002-A, Puebla, Puebla.

³ Instituto Tecnológico de Apizaco-ITP, Avenida Instituto Tecnológico s/n, Apizaco, Tlaxcala. Correo electrónico: jerojagarnica@cenidet.edu.mx

Nota: El período de discusión está abierto hasta el 1° de noviembre de 2013. Este artículo de divulgación es parte de Ingeniería–Revista Académica de la Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Yucatán, Vol. 17, No. 1, 2013, ISSN 1665-529-X.

INTRODUCCIÓN.

Un sinnúmero de componentes mecánicos en la industria transfieren carga por medio del contacto. Con eso se infiere que las características superficiales de los elementos mecánicos son de amplia aplicación e importancia en los problemas de contacto mecánico. Ya que esto está relacionado con múltiples efectos de los fenómenos tribológicos presentes en dichas regiones.

Para los estudios de fricción y de desgaste de superficies, la topografía superficial juega un papel muy importante. El tamaño y la cantidad de las ondulaciones, asperezas y rugosidades que componen las superficies de contacto, condicionan la distribución de cargas en las superficies. Esto tiene influencia directa en la respuesta a la fricción, temperatura por deslizamiento y desgaste presente en los pares de contacto.

Históricamente, la calidad superficial de elementos mecánicos ha sido determinada por parámetros tales como la rugosidad media y desviación estándar, las cuales son características de las asperezas obtenidas de mediciones lineales. Con esta información se han propuesto modelos de representación geométrica para los estudios tribológicos. Uno de los primeros modelos, para representar la topografía superficial, fue el de Greenwood y Williamson (1966), el cual consideró asperezas con puntas esféricas de igual radio y alturas aleatorias dentro de una distribución gaussiana. El planteamiento de asperezas con puntas esféricas ha sido desde entonces comúnmente usado como lo muestran los trabajos de Sellgren y Olofsson (1999); Kligerman (2003); Kogut y Etsion (2003, 2004); Adams y Müftü (2003); y Sahoo y Ali (2008). Por otro lado, Põdra y Andersson (1999) consideraron que una superficie puede ser descrita por la curva de sección de rodadura o curva de Abbott. Ese modelo reemplaza la topografía de la superficie por una sola aspereza bidimensional. Petre y Tudor (2003) consideraron un modelo con una aspereza de punta aguda con varios ángulos de apertura. Jamari y Schipper (2006); y Jamari et al. (2007) presentaron un procedimiento donde se determina la forma de las asperezas,

transformando su configuración a una equivalente en forma de un paraboloide elíptico. Bandeira et al. (2008) presentaron una formulación matemática de dos cuerpos en contacto normal con superficies rugosas, para la construcción de las asperezas usaron curvas Bézier.

En estudios recientes, se ha planteado, que funciones periódicas como la exponencial o seno, tienen mejor correspondencia con la topografía superficial. Lo cual permite la replicación de superficies a múltiples escalas en forma continua y proporcional a un parámetro fractal. Persson (2001a) mostró superficies rugosas con diferentes escalas de longitud de las asperezas, para ello usó la teoría fractal y las series de Fourier para definir las asperezas. La teoría fractal, de característica gaussiana en su distribución, también está presente en trabajos de Persson (2001b); Persson y Tosatti (2001); Persson et al. (2002); Persson et al. (2004); Persson et al. (2005); Goedecke y Mock (2008); Müser (2008); Wriggers y Nettingsmeier (2007); Ciavarella et al. (2000); y Ciavarella et al. (2005). En estos trabajos se presentó la formulación para la replicación de las asperezas, sin embargo, se omitió el procedimiento de obtención del espectro de densidad superficial, término importante que permite el cálculo de las amplitudes de cada una de las escalas que participan en la representación superficial.

En función de la información presentada, se observó que para cualquier estudio de problemas de contacto es necesario iniciar por una adecuada representación de la superficie de interés. Lo cual requiere técnicas de representación y replicación que aproximen la forma original, sin embargo, como complemento a la capacidad de representación estas técnicas deben tener la capacidad de reproducirse a diferentes escalas para facilitar el estudio de fenómenos superficiales como la fricción y el desgaste. Por lo tanto, el objetivo del presente trabajo es mostrar un método para la replicación de superficies rugosas para diferentes escalas usando la teoría fractal. Para esto se parte de la obtención del espectro de densidad superficial (C_q) que se relaciona directamente con la dispersión superficial, y es el parámetro de

mayor importancia usado en la representación gráfica de las asperezas a diferentes escalas. El valor de C_q se obtiene de la medición del perfil de alturas en diferentes superficies muestra, como se describe en el desarrollo del trabajo.

El trabajo consta de una parte conceptual, en donde se describen los términos y ecuaciones que se emplean en la teoría fractal para la obtención de los parámetros superficiales y su posterior replicación. Después, se desarrolla un estudio de caso con muestras superficiales reales para la replicación de tres escalas para ejemplificar el uso de las ecuaciones planteadas. Finalmente, se analizan los resultados obtenidos realizando una comparación con otro ejemplo que emplea diez escalas.

ELEMENTOS DE LA TEORÍA FRACTAL.

El perfil de rugosidades propuesto por Persson et al. (2005) permite generar perfiles de rugosidad muy similares a los observados en las mediciones superficiales. Este perfil se puede expresar, sobre un área cuadrada $L \times L$, a través de la serie de Fourier:

$$h(r) = \sum_q B_q e^{i[qr + \varphi(q)]} \quad (1)$$

Donde:

- r es el vector de posición paralelo a la superficie nominal;
- $h(r)$ es la función de la altura de las asperezas dependiente del vector r ;
- q representa a todos los vectores, múltiplos de $2\pi/L$, que conforman a las frecuencias de las diferentes escalas de longitud de onda consideradas;
- $\varphi(q)$ es el ángulo de desfase entre las diferentes escalas de longitud de onda, en el intervalo $[0, 2\pi]$.

El término B_q se relaciona con las amplitudes de cada término q , y depende del valor del espectro de densidad superficial de las longitudes de onda C_q por medio de la siguiente expresión:

$$B_q = \left(\frac{2\pi}{L_q}\right) [C_q]^{1/2} \quad (2)$$

Donde, el término L_q , es la longitud de onda en la escala q .

De acuerdo a la teoría fractal, Persson (2001a), la relación entre los valores de las densidades superficiales se expresa por:

$$C_q = \begin{cases} C_0 \left(\frac{q}{q_0}\right)^{-2(H+1)} & \text{si } q \geq q_0 \\ C_0 & \text{si } q < q_0 \end{cases} \quad (3)$$

El término q_0 puede relacionarse con la longitud de onda mayor o inferior del conjunto de escalas considerado. Por lo general, se toma a la longitud mayor, de tal forma que $L_0 = \lambda_0$, y, $q_0 = 2\pi / \lambda_0$.

El exponente de Hurst, H , es una medida de auto-similitud presente entre elementos geométricos a diferentes escalas, y oscila entre 0 y 1. Fuera de este rango no existiría auto-similitud, por lo cual, no se cumpliría con una condición de la teoría fractal.

Para la obtención del exponente de Hurst se requiere de las densidades C_q y de los valores q de las escalas consideradas, en escala logarítmica (figura 1).

El valor de la pendiente de la recta definida entre los vectores q_0 y q_1 , permite calcular H por medio de:

$$H = \frac{-\text{pendiente}}{2} - 1 \quad (4)$$

El valor del espectro de densidad (C_q), de las diferentes escalas de longitud de onda, se obtiene a través de la medición superficial de las alturas de las asperezas, para lo cual se subdivide a las superficies, como se muestra en la figura 2, en cuyos nodos se toma el valor de altura.

El valor C_q indica las frecuencias, de los datos superficiales medidos. Se define como la transformada de Fourier de la función de autocorrelación:

$$C_q = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2r \langle h(r)h(0) \rangle e^{-iq \cdot r} \quad (5)$$

En donde, $r = (x, y)$ y $h(r)$ es la altura sobre la superficie nominal. El término $\langle \dots \rangle$ indica el promedio sobre un conjunto de superficies diferentes con propiedades estadísticas similares.

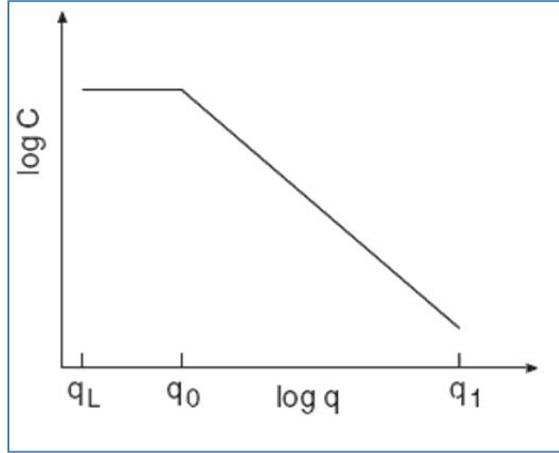


Figura 1. Gráfica logarítmica entre las densidades superficiales y sus respectivos valores q .

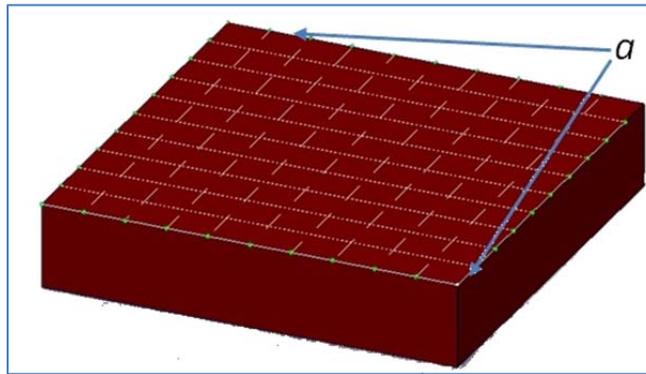


Figura 2. Discretización de una superficie muestra para la medición de alturas.

Si se asume a la muestra como lo suficientemente densa, una definición equivalente de C_q , según Persson *et al.* (2005), es la del módulo al cuadrado de la transformada de Fourier de $h(r)$, la cual se aproxima al concepto de ‘densidad espectral de energía’ usado en la teoría de señales electrónicas. Con lo que, al considerar el tamaño de la superficie muestra $A_q = L \times L$, y a la dispersión superficial en dicha superficie para una frecuencia q como $h_A(q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_A d^2r h(r) e^{-iq \cdot r}$, se tiene:

$$C_q = \frac{(2\pi)^2}{A_q} \langle |h_A(q)|^2 \rangle \quad (6)$$

Donde:

- A_q , es el área de la superficie muestra;
- $\langle |h_A(q)|^2 \rangle$ es el promedio de la dispersión superficial, al cuadrado, de las alturas de diferentes superficies muestra,

el término de dispersión superficial $h_A(q)$ se obtiene por:

$$h_A(q) = \frac{a^2}{(2\pi)^2} \sum_n h_n e^{-i(q_x n_x a + q_y n_y a)} \quad (7)$$

El término h_n es la altura superficial en el nodo superficial (x, y) cuyas coordenadas con respecto a un punto de referencia son $(n_x a, n_y a)$, donde $n_x = 1, 2, \dots, n$ y $n_y = 1, 2, \dots, m$ indican el número de nodo en un arreglo rectangular y a es la distancia entre nodos de la superficie medida. Los valores q_x y q_y caracterizan la frecuencia de las longitudes de onda, en direcciones ortogonales, los cuales pueden ser iguales o diferentes.

Si los conjuntos de asperezas, de diferentes longitudes, resultan ser auto-similares entonces las ecuaciones (2) y (3) para el cálculo de los

diferentes B_q y C_q se pueden usar para la replicación superficial con las escalas requeridas.

CASO DE ESTUDIO

Mediante medios ópticos o electromecánicos es posible determinar las alturas y frecuencias asociadas a las longitudes de onda de interés. En una representación ideal, todas las frecuencias se consideran, aunque para fines prácticos se establecen rangos de frecuencias de interés.

Si se emplean dispositivos electromecánicos (rugosímetros), se obtiene un perfil lineal de la superficie por medio de la correspondencia entre la señal recibida con la posición vertical. Para realizar un muestreo superficial se requieren varias mediciones lineales de forma paralela y equidistante hasta cubrir un área determinada. La longitud de onda medida, en determinada escala, depende del filtro utilizado y se obtiene del cociente de la longitud media entre el número de “picos” promedio hallado. Existen otros dispositivos electromecánicos que pueden recabar datos en tres dimensiones, en donde el palpador cuenta con carreras motorizadas, lo que permite elaborar el mapeo superficial, mediante múltiples recorridos paralelos, aunque al igual que los rugosímetros de un solo eje de trazado, la resolución del equipo depende del tamaño del palpador y del filtrado de señales. Otra alternativa es un dispositivo óptico como el interferómetro, donde las diferencias en intensidad obtenidas se relacionan con las alturas del perfil superficial.

Como ejemplo, se realizaron mediciones en dos escalas, que se muestran en las tablas 1 y 2, con longitudes medias $L_0=833 \mu\text{m}$ ($q_0 =$

$2\pi/833 = 0.00754284 \mu\text{m}^{-1}$) y $L_1=66.6 \mu\text{m}$ ($q_1 = 2\pi/66.6 = 0.094342122 \mu\text{m}^{-1}$), y para denotar el carácter multi-escala del método, se agregó una tercera escala más pequeña $L_2=6.66 \mu\text{m}$ ($q_2 = 2\pi/6.66 = 0.943421217 \mu\text{m}^{-1}$).

Los datos de la tabla 1 se obtuvieron de una muestra cuadrada de 9x9 puntos espaciados ortogonalmente entre sí a $200 \mu\text{m}$, resultado de una medición de ondulaciones con la máquina de medición de coordenadas APEX 710 de Mitutoyo. La longitud media obtenida es $L_0=833 \mu\text{m}$, la cual en este caso fue aplicable tanto en la dirección longitudinal como transversal, es decir, $q_{x0} = q_{y0} = \frac{2\pi}{833} = 0.00754284 \mu\text{m}^{-1}$.

Al emplear la ecuación (7) el término de dispersión superficial de toda la superficie muestra es:

$$h_A(0) = 196318.1347 \mu\text{m}^3$$

Los datos de la tabla 2 se obtuvieron de una muestra cuadrada de 9x9 puntos espaciados ortogonalmente entre sí a $20 \mu\text{m}$, por medio de un rugosímetro SurfTest SV-402 Mitutoyo. La longitud media aplicable en las direcciones longitudinal y transversal es $L_1=66.6 \mu\text{m}$, con lo que las frecuencias son $q_{x1} = q_{y1} = \frac{2\pi}{66.6} = 0.094342122 \mu\text{m}^{-1}$.

Entonces, la dispersión superficial es:

$$h_A(1) = 271.5910911 \mu\text{m}^3$$

Tabla 1. Altura superficial h_n en micras, de una muestra de asperezas con $L_0=833 \mu\text{m}$ y $a=200 \mu\text{m}$.

| ny\nx | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| 1 | 0.6 | -0.4 | -6.2 | -10.4 | -8.4 | -4.2 | 2.2 | 2 | -0.2 |
| 2 | -2 | 5.6 | 8.6 | 5.8 | -0.2 | 2.6 | 3.8 | 3.6 | 0.6 |
| 3 | -6 | -9.2 | -7.4 | -4.2 | 1.8 | 1.2 | -2 | 6 | 7.6 |
| 4 | 3.8 | -0.4 | -3.8 | -2.4 | -1.4 | 2 | -0.2 | 0 | 2.2 |
| 5 | -0.8 | -4.2 | -6 | -1.8 | 0.4 | 3.8 | 1.2 | 6 | 8 |
| 6 | -5 | -8.8 | -7.4 | -4.2 | -0.6 | 5.8 | -1.4 | -4 | 7 |
| 7 | 5.8 | -5.4 | -3.2 | -1.6 | 7.8 | 3.2 | 0.4 | -5.8 | 4.4 |
| 8 | 3.2 | -2 | 0.2 | 3 | 3.8 | 6 | 3 | 0.2 | 1.4 |
| 9 | 0.4 | -6 | -1.4 | 2 | 2.2 | 0.6 | -0.6 | -5.4 | -1 |

Tabla 2. Altura superficial h_n en micras, de una muestra de asperezas con $L_1=66.6 \mu m$ y $a=20 \mu m$.

| ny\nx | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | -0.76 | 0.36 | -0.65 | -0.19 | -0.43 | 0.53 | -0.12 | -0.16 | 0.35 |
| 2 | -0.47 | 0.7 | -0.49 | -1.29 | -0.33 | -1.3 | 0.4 | -0.41 | 1.29 |
| 3 | 0.35 | -0.59 | -0.02 | 0.36 | -0.62 | -0.01 | -0.5 | 0.28 | 0.67 |
| 4 | 0.4 | -0.27 | -0.08 | 0.1 | 0.49 | -0.64 | -0.61 | 0.47 | -0.65 |
| 5 | -0.13 | 0.71 | 0.25 | 0.89 | -0.46 | 0.34 | 0.44 | -0.34 | 0.54 |
| 6 | 0.73 | 1.44 | 0.45 | 0.51 | 0.02 | -0.67 | 0.29 | 0.53 | -0.07 |
| 7 | -0.67 | 0.33 | -0.6 | -0.83 | 0.55 | -0.5 | -0.75 | -0.9 | 0.34 |
| 8 | 0.32 | -0.56 | -0.77 | 0.07 | -0.86 | 0.7 | 0.04 | 0.02 | 0.55 |
| 9 | 1.31 | 0.12 | 1.3 | -0.18 | -0.58 | 0.36 | -0.37 | 0.37 | -0.34 |

En consecuencia, las dispersiones superficiales al cuadrado son:

$$\begin{aligned} \langle |h_A(0)|^2 \rangle &= 38540810010 \mu m^6 \\ \langle |h_A(1)|^2 \rangle &= 73761.72079 \mu m^6 \end{aligned}$$

En la escala mayor se ocupó el área de $(9 \times 200)^2 = 3240000 \mu m^2$ y en la menor de $(9 \times 20)^2 = 32400 \mu m^2$, con lo que al emplear la ecuación (6) los valores de densidad superficial son:

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{(2\pi)^2}{A_0} \langle |h_A(0)|^2 \rangle \\ &= \frac{(2\pi)^2}{3240000 \mu m^2} (38540810010) \mu m^6 \\ &= 469608.0841 \mu m^4 \\ C_1 &= \frac{(2\pi)^2}{A_1} \langle |h_A(1)|^2 \rangle \\ &= \frac{(2\pi)^2}{32400 \mu m^2} (73761.72079) \mu m^6 \\ &= 89.87642026 \mu m^4 \end{aligned}$$

Entonces, los valores en escala logarítmica resultaron en:

$$\begin{aligned} \log(C_0) &= 5.671735564, \\ \log(C_1) &= 1.953645766, \\ \log(q_0) &= -2.122465133, \\ \text{y} \quad \log(q_1) &= -1.025294361. \end{aligned}$$

Con lo que el valor de la pendiente, según la figura 2, es:

$$pendiente = -3.388797708$$

Por lo tanto el valor del exponente de Hurst es:

$$H = \frac{-pendiente}{2} - 1 = 0.694398854$$

Cuyo valor está entre los límites 0 y 1, en consecuencia existe auto-similitud entre las asperezas de las dos escalas medidas.

Para su replicación gráfica se usó el software comercial matlab con un código propio. En consecuencia, al usar $C_0=469608.0841 \mu m^4$ los datos de densidades superficiales y amplitudes de la serie de Fourier que se obtienen, ecuaciones (3) y (2), son:

$$\begin{aligned} C_1 &= C_0 \left(\frac{q_1}{q_0} \right)^{-2(H+1)} = 89.87642026 \mu m^4 \\ C_2 &= C_0 \left(\frac{q_2}{q_0} \right)^{-2(H+1)} = 0.036715383 \mu m^4 \\ B_0 &= \left(\frac{2\pi}{L_0} \right) [C_0]^{1/2} = 8.933067433 \mu m \\ B_1 &= \left(\frac{2\pi}{L_1} \right) [C_1]^{1/2} = 0.894393269 \mu m \\ B_2 &= \left(\frac{2\pi}{L_2} \right) [C_2]^{1/2} = 0.361542756 \mu m \end{aligned}$$

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La representación gráfica de las tres escalas de asperezas se muestra en las figuras 3 y 4. En estas imágenes es posible observar la similitud de las ondulaciones o asperezas a diferente escala con un perfil en forma senoidal. En la figura 3 se aprecian las escalas 1 y 2.

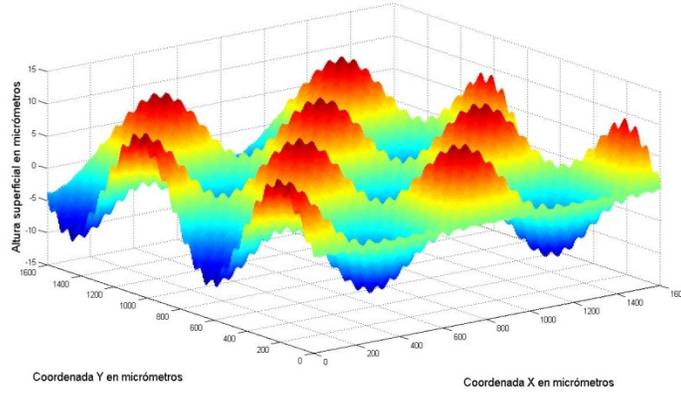


Figura 3. Representación gráfica de asperezas en tres escalas ($L_0=833$ micras, $L_1=66.6$ micra y $L_2=6.66$ micras).

En la figuras 4 se muestra un acercamiento con respecto a la figura 3, en la región superficial $X=400-650$, $Y=400-650$, en donde se aprecia mejor la similitud entre la escalas 2 y 3.

La regularidad, característica de la naturaleza fractal, que se muestra en las figuras 3 y 4 obedeció al uso de solo tres escalas, las cuales pueden relacionarse con los órdenes de magnitud de las rugosidades y ondulaciones, y son útiles para estudios de contacto, desgaste y fricción. Para incrementar el nivel de correspondencia con la superficie real se requiere incorporar más escalas en la representación.

Al respecto no existe un número predefinido

para el número de escalas en la representación superficial. Sin embargo, se plantea que es posible establecer valores límite, en este sentido la escala mayor, por lo general, se define por medio de los defectos de primer orden como lo son las ondulaciones por tolerancia geométrica del elemento mecánico. Mientras que el límite inferior se define por las magnitudes de las imperfecciones superficiales requeridas para el estudio. Así, por ejemplo, en el caso de fretting en ensambles de máquinas o sistemas mecatrónicos se considera que la escala micrométrica sería suficiente, pero para el comportamiento de semiconducción en micro-electro-máquinas (MEMS) es necesario considerar la escala nanométrica.

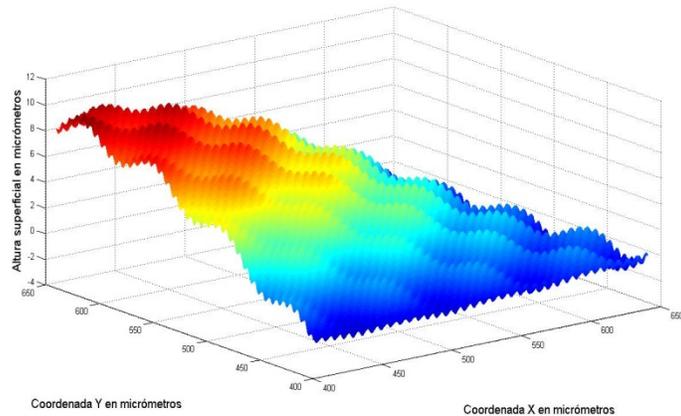


Figura 4. Acercamiento a las asperezas, en tres escalas, mostradas en la figura 3, en la región ($X=400-650$, $Y=400-650$).

Una vez establecidos los límites, y a partir de las características de las mediciones realizadas correspondientes, el método presentado puede replicar superficies independientemente de las escalas participantes, por ejemplo, en la figura 5 se muestra una superficie que se generó con 10 escalas en donde la escala mayor es $L_{10}=55 \mu\text{m}$ ($q_{10}=0.114239733$) y la menor $L_{19}=5.78 \mu\text{m}$ ($q_{19}=1.08705705$). Estas escalas tienen una auto-similitud $H=0.802$.

El número de escalas presentes en la figura 5 fue seleccionado sin criterio alguno, y su objetivo fue mostrar la inclusión de un número mayor de escalas mediante el método propuesto. Sin embargo, una forma de calcular el número de escalas en una replicación se indica en la serie Weierstrass, Ciavarella et al. (2000), en la cual las n escalas intermedias que participan entre los valores límite se obtienen por:

$$n = -\frac{\ln(\epsilon)}{\ln(\gamma)} \quad (8)$$

Donde,

- ϵ es la razón entre los límites inferior y superior, $\epsilon = L_n/L_0$
- γ es una constante mayor a uno.

En cualquier forma, al usar la ecuación (8) tampoco hay un criterio para definir el valor γ , el cual al ser más cercano a 1 propicia mayor número de escalas y no está acotado.

Lo ideal, en el proceso de replicación de superficies, es obtener las diferentes escalas directamente de las mediciones, aunque éstas es obvio están restringidas por la resolución de los dispositivos de medición.

Para verificar la correspondencia entre la superficie replicada con la superficie real medida se recurre a la microscopía, en la cual se pueden obtener mediciones cuantitativas como en el caso de la interferométrica, confocal o de fuerzas atómicas.

Un aspecto que limita el uso de la teoría fractal es la existencia de auto-similitud, la que se garantiza cuando el exponente de Hurst, H , está en el rango de 0 a 1.

Si h_0 es la amplitud de la rugosidad superficial sobre la escala de longitud λ_0 , entonces la amplitud h de la rugosidad superficial en la escala de longitud λ se puede obtener, de forma aproximada como, Persson y Tosatti (2001):

$$h \approx h_0 \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^H \quad (9)$$

Al emplear valores $h_0 = 40 \mu\text{m}$, $\lambda = 100 \mu\text{m}$ y $\lambda_0 = 10 \mu\text{m}$, se obtuvieron valores de h para diferentes valores de H , mismos que se muestran en la tabla 3.

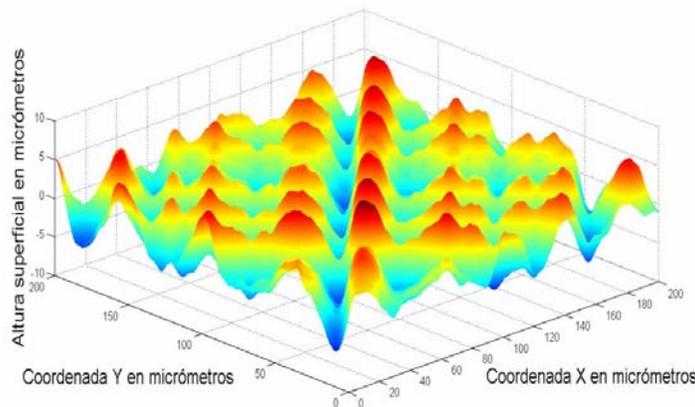


Figura 5. Replicación de una superficie empleando 10 escalas con $H=0.802$ (dimensiones en micrómetros).

Tabla 3. Valores de amplitud h para diferentes exponentes H , cuando $h_0 = 40 \mu m$, $\lambda = 100 \mu m$ y $\lambda_0 = 10 \mu m$

| H | h |
|----------|----------|
| 0 | 40 |
| 0.4 | 15.92 |
| 0.6 | 10.05 |
| 0.8 | 6.33 |
| 1 | 4 |
| 1.2 | 2.52 |
| 1.4 | 1.592 |

De acuerdo a la tabla 3, cuando $H=1$ existe una semejanza en la misma proporción entre la longitud y amplitud de las escalas relacionadas.

Cuando $H < 1$, la proporción entre amplitudes, de la escala menor con respecto a la mayor, se incrementa, con respecto a la proporción entre longitudes, hasta alcanzar un valor máximo en $H=0$.

Cuando $H > 1$, la proporción entre amplitudes, de la escala menor con respecto a la mayor, disminuye, con respecto a la proporción entre longitudes, logarítmica y asintóticamente, es decir, cuando $H \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$.

CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta un método que permite la representación multi-escalas de las asperezas superficiales por medio de series de Fourier, en donde los términos de amplitud de cada escala se relacionan entre sí por su auto-similitud según la teoría fractal. Los términos de amplitud se calculan usando el término de espectro de densidad superficial, el cual en sentido práctico se obtiene de mediciones

superficiales por medio del dispositivo de medición. El método expuesto se considera práctico en su aplicación, y es independiente del número y tamaño de las escalas que se consideren en la replicación. Se tienen como principales limitantes a la existencia de auto-similitud entre las diversas escalas y a la resolución de los dispositivos de medición empleados. A pesar de la limitante de resolución, la posibilidad de uso de equipo básico, como el rugosímetro, para el muestreo dimensional a ciertas escalas, es una condición importante para situaciones en donde se carece de equipos sofisticados de medición como la microscopía electrónica. La limitante derivada por la falta de auto-similitud podría ser superada si se emplean intervalos de escalas que compartan exponente fractal, es decir, intervalos con diferentes pendientes en la escala logarítmica. Por último, cabe señalar que la geometría superficial que se genera con este método es aplicable a cuerpos que se someten al proceso de mallado para análisis con elementos finitos, y que son la base para simulaciones de problemas de contacto mecánico y sus efectos tribológicos.

RECONOCIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo recibido para el desarrollo del presente trabajo al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, y a la Universidad Tecnológica de Puebla, dentro del proyecto de investigación CONACYT CB102025.

REFERENCIAS

Adams G. G., Müftü S. (2003). Asymmetric asperity height distributions in a scale-dependent model for contact and friction. "Proceedings of 2003 STLE/ASME Joint International Tribology Conference". Ponte Vedra Beach, Florida USA. October 26-29, 2003.

Bandeira A. A., Pimento P. M., Wriggers P. (2008). A 3d contact investigation of rough surfaces considering elastoplasticity. "Exacta". Vol. 6, no. 1. 109-118.

Ciavarella M., Demelio G., Barber J. R., Jang Y.H. (2000). Linear elastic contact of the Weierstrass profile. "Proc. R. Soc. Lond." A, 456. 387-405.

Ciavarella M., Murolo C., Demelio G. (2005). On the elastic contact of rough surfaces: numerical experiments and comparisons with recent theories. "Associazione Italiana per L'Analisi Delle Sollecitazioni, xxxiv Convegno Nazionale". Politecnico di Milano. 14-17 settembre, 2005.

Goedecke A., Mock R. (2008). A new fractal model for dynamic contact phenomena including friction. "Proceedings of the Comsol Conference 2008". Hannover, Germany.

Greenwood J. A., Williamson J. B. P. (1966). Contact of nominally flat surfaces.. "Proc. R. Soc. London". A, 295. 300-319.

Jamari J., Schipper D. J. (2006). An elastic-plastic contact model of ellipsoid bodies. "Tribology Letters". Vol. 21, no. 3. 262-271.

Jamari J., De Rooij M. B., Schipper D. J. (2007). Plastic deterministic contact of rough surfaces. "Journal of Tribology". Vol. 129. 957-962.

Kligerman Y. (2003). Multiple solutions in dynamic contact problems with friction. "Proceedings of 2003 STLE/ASME Joint International Tribology Conference". Ponte Vedra Beach, Florida USA. October 26-29, 2003.

Kogut L., Etsion I. (2003). A finite element based elastic-plastic model for the contact of rough surfaces. "Society of tribologists and lubrication engineers, Tribology transactions". Vol. 46-3. 383-390.

Kogut L., Etsion I. (2004). A static friction model for elastic-plastic contacting rough surfaces. "Journal of tribology". Vol. 126. 34-40.

Müser M. H. (2008). A rigorous, field-theoretical approach to the contact mechanics of rough, elastic solids. "Physical Review Letters", 100. 4 pages.

Persson B. N. J. (2001-a). Elastoplastic contact between randomly rough surfaces. "Physical review letters". Vol. 87, no. 11. 1-4.

Persson B. N. J. (2001-b). Theory of rubber friction and contact mechanics. "Journal of chemical physics". Vol. 115, no. 8. 3840-3861.

Persson B. N. J., Tosatti E. (2001). The effect of surface roughness on the adhesion of elastic solids. "Journal of chemical physics". Vol., 115, no. 12. 5597- 5610.

Persson B. N. J., Bucher F., Chiaia B. (2002). Elastic contact between randomly rough surfaces: comparison of theory with numerical results. "Physical review b". Vol. 65. 1-7.

Persson B. N. J., Albohr O., Creton C., Peveri V. (2004). Contact area between a viscoelastic solid and a hard, randomly rough, substrate. "Journal of chemical physics". Vol. 120, no. 18. 8879-8793.

Persson B. N. J., Albohr O., Tartaglino, Volokitin A. I., Tosatti E. (2005). On the nature of surface roughness with application to contact mechanics, sealing, rubber friction and adhesion. "Journal of physics: condensed matter, 17". r1-r62.

Petre I., Tudor A. (2003). Friction and wear model for polymer and cast iron couple. "The annals of University 'Dunărea de Jos' of Galați, fascicle viii, tribology". 107-111.

Põdra P., Andersson S. (1999). Finite element analysis wear simulation of a conical spinning contact considering surface topography. "Wear", no. 224. 13-21.

Sahoo P., Ali S. M. (2008). Elastic-plastic adhesive contact of non-gaussian rough surfaces. "Sādhanā". Vol. 33, part 4. 367-384.

Sellgren U., Olofsson U. (1999). Application of a constitutive model for micro-slip in finite element analysis. "Computer methods in applied mechanics and engineering", 170/1-2. 65-77.

Wriggers P., Nettingsmeier J. (2007). Homogenization and multi-scale approaches for contact problems. "Computational Contact Mechanics", Vol. vii, Springer. 129-161.

Este documento debe citarse como: Rojas Garnica J. C., Bedolla Hernández J., Szwedowicz Wasik D. (2013). **Replicación de Características Superficiales por medio de la Teoría Fractal**. Ingeniería, Revista Académica de la FI-UADY, 17-1, pp 81-91, ISSN 1665-529-X.