

Caracterización de los parámetros de fractura del concreto simple mediante un análisis numérico

Fernández-Baqueiro, L. E.¹, Pérez, H. A.², Varela, J. L.³

Recibido: 22 de febrero de 2006 - Aceptado: 13 de octubre de 2006

RESUMEN

El concreto es un material ampliamente utilizado por los Ingenieros Civiles. El concreto simple está clasificado como material cuasi-frágil dentro de la Mecánica de la Fractura, ya que presenta en su curva de comportamiento esfuerzo – deformación a tensión un intervalo de ablandamiento por deformación después de alcanzar su esfuerzo máximo. La curva de ablandamiento por deformación es función de su forma y de los parámetros de fractura (resistencia a tensión, energía de fractura, abertura de grieta crítica). En este artículo se presenta una metodología para la determinación de los parámetros de fractura que permiten reproducir numéricamente los resultados de un caso experimental, correspondiente a un conjunto de especímenes de concreto simple de diversos tamaños que fallan en Modo I de fractura. Se emplea la Aproximación de Discontinuidades Interiores en el Método del Elemento Finito para simular numéricamente el proceso de fractura del concreto a tensión. Se identifican valores experimentales y numéricos para los parámetros de fractura. Se discuten las diferencias entre los valores experimentales y numéricos de la resistencia a tensión a partir de la distribución de esfuerzos que se produce en el espécimen para la carga máxima. Se concluye que a través del modelo numérico es posible caracterizar el comportamiento del material estudiado.

Palabras claves: concreto, fractura, ablandamiento por deformación, resistencia a tensión, método del elemento finito

Characterization of fracture parameters of plain concrete by a numerical analysis

ABSTRACT

Concrete is a material widely used by Civil Engineers. Plain concrete is classified as a quasi-brittle material in Fracture Mechanics because its tensile stress–strain response curve presents a strain softening range after its maximum stress. The strain softening curve is a function of its shape and the fracture parameters (tensile strength, fracture energy, critical crack opening). In this paper a methodology for the determination of the fracture parameters that numerically reproduces the results from an experimental case is presented; the experimental case corresponds to plain concrete specimens that fail in Mode I of fracture. The Embedded Discontinuity Approximation in the Finite Element Method is used to simulate numerically the fracture process of concrete in tension. Experimental and numerical values of fracture parameters are identified. The differences between the experimental and numerical values of the tension strength are discussed based on the stress distribution in the specimen for the maximum load. It is concluded that the material behavior can be characterized using the numerical model.

Keywords: concrete, fracture, strain softening, tensile strength, finite element method

¹ Profesor Investigador, C.A. de Estructuras y Materiales, FIUADY. E-mail: baqueiro@uady.mx

² Egresado de la Maestría en Ingeniería-Estructuras, FIUADY

³ Profesor Investigador, C.A. de Estructuras y Materiales, FIUADY. E-mail: vriviera@uady.mx

INTRODUCCIÓN

Los materiales empleados en la ingeniería civil se pueden clasificar de acuerdo a sus curvas esfuerzo – deformación a tensión como: frágiles, cuasi-frágiles o dúctiles (Shah et al., 1995). Los materiales cuasi-frágiles (Ej. concreto, rocas) presentan una curva esfuerzo - deformación a tensión en la cual se observa un intervalo de ablandamiento por deformación después de alcanzar el esfuerzo máximo. Este intervalo se caracteriza por un decremento gradual de la magnitud de los esfuerzos al incrementarse las deformaciones debido a la propagación del agrietamiento. El comportamiento de ablandamiento por deformación del material se puede describir empleando una curva esfuerzo - abertura de grieta ($\sigma - w$) definida con base en tres parámetros: (1) la resistencia a tensión f_t , (2) la energía de fractura G_f , definida como el área bajo la curva $\sigma - w$, y (3) la abertura de grieta crítica w_c , definida como la abertura de grieta para la cual la transferencia de esfuerzos es nula.

En este artículo se presenta una metodología para la determinación de los parámetros de fractura que permiten reproducir numéricamente los resultados de estudios experimentales de fractura en Modo I de falla de especímenes de materiales cuasi-frágiles. Se analiza un caso experimental correspondiente a un espécimen de concreto simple probado en la Universidad Tecnológica de Delft. Se emplea la herramienta numérica desarrollada por Fernández y Ayala (2006), la cual corresponde a la Aproximación de Discontinuidades Interiores en el Método del Elemento Finito (MEF). Se comparan los valores de los parámetros de fractura calculados de la información experimental promedio y del modelo numérico, concluyendo que a través del modelo

numérico es posible caracterizar el comportamiento del material estudiado.

METODOLOGÍA

A continuación se resumen los pasos realizados en este trabajo de investigación para caracterizar los parámetros de fractura de un caso experimental con especímenes de concreto simple:

1. Selección de un caso experimental de fractura de concreto simple en Modo I de falla.
2. Obtención de información asociada a las características del experimento y los resultados.
3. Elaboración del modelo de elementos finitos.
4. Obtención de resultados preliminares del modelo de elementos finitos empleando datos numéricos calculados a partir de los resultados experimentales promedio.
5. Análisis de sensibilidad de los parámetros de fractura para determinar los valores que mejor reproducen los resultados experimentales.
6. Caracterización de las propiedades del material y análisis de los resultados.

Caso experimental

En esta investigación se seleccionó el experimento desarrollado por Van Vliet (2000) en la Universidad Tecnológica de Delft, Holanda. En este experimento se probaron especímenes de concreto simple cuya geometría (Figura 1) variaba de acuerdo a una dimensión característica D , con el objetivo de estudiar el efecto de tamaño en la resistencia a tensión del material; la dimensión característica de dichos especímenes fue de 50, 100, 200, 400, 800 y 1600 mm, designados con las letras A, B, C, D, E y F, respectivamente.

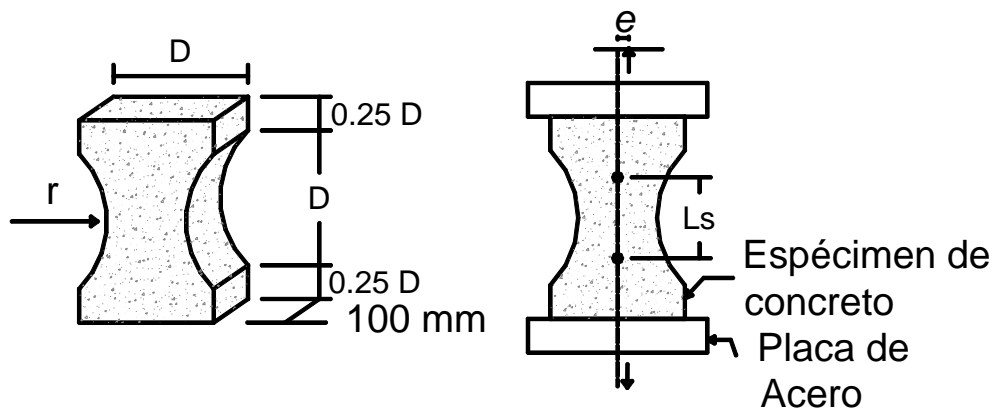


Figura 1. Descripción de la placa entallada de Van Vliet. Adaptado de Van Vliet (2000).

Se seleccionaron para el análisis numérico de esta investigación los especímenes B, C y D. Se descartó el espécimen A porque presenta una notable dispersión en los resultados experimentales; los especímenes E y F se descartaron porque sus curvas de respuesta presentan retroceso (snap – back) (Crisfield, 1997), el cual es un fenómeno que se caracteriza por un decremento en las deformaciones cuando ocurre el ablandamiento y cuyo tratamiento numérico presenta dificultades. En este trabajo se presenta de forma detallada los resultados obtenidos del análisis del espécimen B, mientras que para los otros dos especímenes solamente se presentan los resultados finales

Información experimental

Los resultados experimentales obtenidos por Van Vliet (2000) consisten en curvas carga - deformación (P - δ) de los especímenes, en donde P es una carga aplicada con una excentricidad e y δ es la deformación medida sobre una distancia Ls (Figura 1). El experimentalista aplicó la carga con una pequeña excentricidad para conocer a priori el lado

donde se iniciaría el agrietamiento. Con base en estas curvas Van Vliet estimó las propiedades del material: Módulo de elasticidad E, esfuerzo resistente a tensión f_t , energía de fractura G_f , carga máxima P_u y deformación al alcanzar la carga máxima δ_u . Las propiedades del material son indispensables para la realización del análisis no lineal por el Método del Elemento Finito; en particular se requiere el módulo de elasticidad E y la curva de ablandamiento definida por la relación esfuerzo – abertura de grieta ($\sigma - w$). Van Vliet estimó las curvas de ablandamiento ($\sigma - w$) aplicando las ecuaciones básicas de la Mecánica de la Fractura No Lineal. A continuación se enumeran los pasos para calcular las curvas de ablandamiento promedio siguiendo el procedimiento empleado por Van Vliet, el cual no incorpora el efecto de la excentricidad de la carga (e), ni la distribución no uniforme de esfuerzos en la sección transversal de los especímenes.

1) Obtener los valores numéricos de las envolventes de las curvas experimentales P - δ (Figura 2).

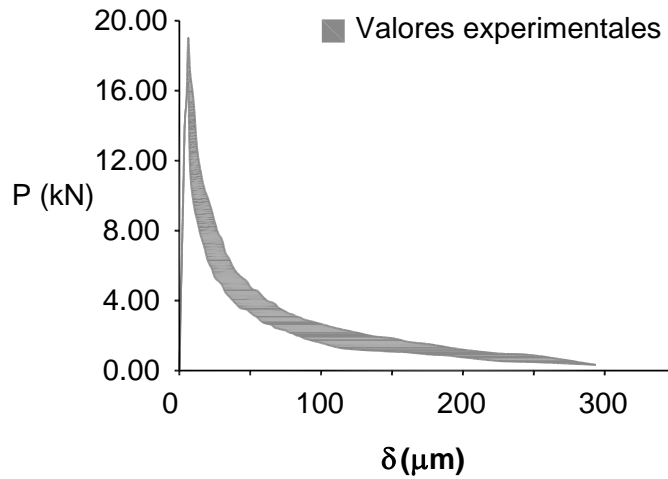


Figura 2. Datos experimentales de la curva P - δ del espécimen B.

2.2) Calcular una curva P-δ promedio, que sea representativa de los resultados experimentales.

3.3) Determinar la curva de ablandamiento σ -w (Figura 3) con base en la curva P-δ promedio (Van Vliet 2000):

a) El esfuerzo axial a tensión σ se calcula como:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (1)$$

donde: A es el área de la sección transversal del espécimen en su parte más estrecha $A= 0.6Dt$ (Figura 1) y t es el espesor del espécimen.

b) El esfuerzo resistente a tensión se determina con la expresión:

$$f_t = \frac{P_u}{A} \quad (2)$$

donde: P_u es la carga máxima aplicada.

c) La abertura de grieta w se calcula con base en la deformación del espécimen δ ; esta deformación tiene una componente elástica δ_e , una componente plástica $\delta_{p,u}$ y una componente asociada a la abertura

de la grieta w . La deformación elástica δ_e se calcula como:

$$\delta_e = \frac{P}{k} \quad (3)$$

donde: k es la pendiente inicial de la curva $P - \delta$, calculada mediante la interpolación lineal de los datos de la curva inferiores al 80% de P_u . La deformación plástica $\delta_{p,u}$ se calcula como:

$$\delta_{p,u} = \delta_u - \delta_{e,u} \quad (4)$$

donde: δ_u es la deformación correspondiente a la carga máxima; $\delta_{e,u}$ es la deformación elástica correspondiente a la carga máxima. La abertura de grieta w se calcula como:

$$\begin{aligned} \delta \leq \delta_u & \quad w = 0 \\ \delta > \delta_u & \quad w = \delta - (\delta_e + \delta_{p,u}) \end{aligned} \quad (5)$$

La abertura de grieta crítica w_c es el valor de abertura de grieta para la cual la transmisión de esfuerzos de tensión es nula y corresponde a un estado de ruptura total del elemento. En el caso experimental estudiado los especímenes no se llevaron a la ruptura total, por lo que no es posible determinar el valor de w_c a partir de la información experimental. Por esta razón, el valor de w_c se estableció mediante un ajuste de mínimos cuadrados de los datos experimentales del intervalo final de la curva de ablandamiento que fueran menores al 10% del valor de f_t .

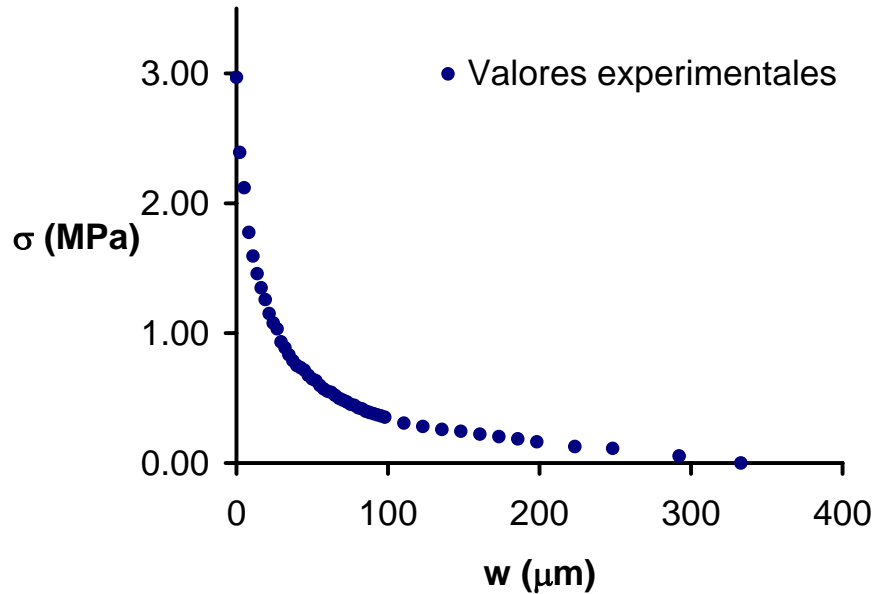


Figure 3. Curva de ablandamiento esfuerzo – abertura de grieta del espécimen B

4.4) Verificar que el valor de la energía de fractura G_f , de la curva $\sigma - w$ construida en el paso anterior, sea aproximadamente igual a la G_f reportada del experimento, considerando un criterio de aproximación de $\pm 2.5\%$. Esto permite comprobar que la curva $\sigma - w$ construida en el paso anterior reproduce lo observado experimentalmente.

5) Aproximar las curvas de ablandamiento promedio por medio de curvas multilíneas. Esta actividad es necesaria debido a que el modelo constitutivo implementado computacionalmente únicamente

abarca curvas de ablandamiento multilíneas. Para este propósito se propuso el siguiente procedimiento:

- (a) Se divide la curva de ablandamiento en un conjunto de intervalos que se definen en función de f_t (Tabla 1);
- (b) Para cada intervalo se ajusta una recta con la información experimental;
- (c) Se obtienen los puntos de intersección entre las rectas;
- (d) El punto inicial de la curva de ablandamiento $(0, f_t)$ corresponde al valor promedio experimental de f_t (Ec. 2) y el punto final de la curva $(w_c, 0)$ se calcula con la interpolación lineal del último rango de datos de la curva de ablandamiento.

Tabla 1. Intervalos propuestos para el ajuste multilíneal

Intervalos de interpolación (% de ft)	
Límite inferior	Límite superior
0.70	1.00
0.40	0.70
0.25	0.40
0.20	0.25
0.15	0.20
0.10	0.15
0.00	0.10

El conjunto de puntos encontrado define una curva de ablandamiento multilíneal que ajustó de forma satisfactoria a la determinada para los datos

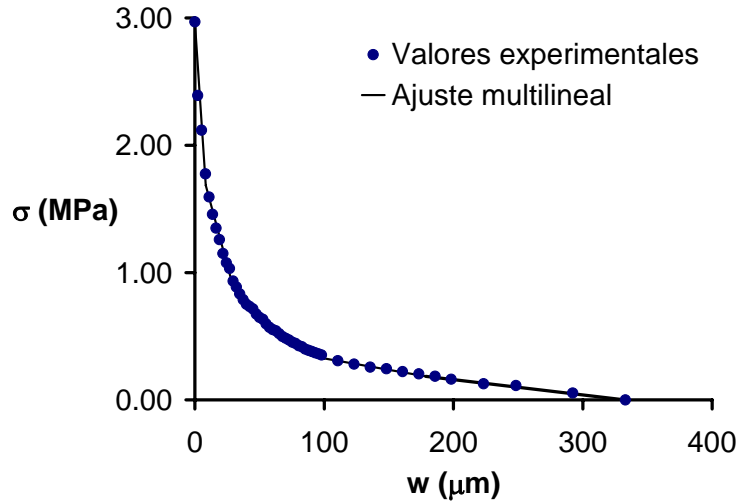


Figura 4. Aproximación de la curva de ablandamiento del espécimen B mediante un conjunto de líneas

En la Aproximación de Discontinuidades Interiores se modifica la aproximación del campo de desplazamientos del elemento finito para que éste sea capaz de simular la presencia de una discontinuidad (grieta) en su interior; la ventaja de esta aproximación es que no se requiere remallar durante la propagación de la discontinuidad. La geometría de la malla se definió de acuerdo a las dimensiones presentadas en la Figura 1 para cada espécimen; se utilizó aproximadamente el mismo número de elementos finitos para los distintos tamaños de especímenes, manteniendo la relación de aspecto (Figura 5). Se emplearon elementos finitos triangulares de deformación constante con el modelo de esfuerzo plano.

En el análisis no lineal se empleó una tolerancia de 1×10^{-10} para la convergencia de la solución. En este modelo se consideraron dos materiales: acero en las

experimentales (Figura 4). Se verificó que el valor de la energía de fractura de la curva multilíneal se aproxime satisfactoriamente al valor experimental promedio.

Modelo de Elementos Finitos

El análisis numérico se realizó empleando una versión del programa FEAP 7.5 del Método del Elemento Finito (Taylor, 2004), la cual incluye la implementación de la Aproximación de Discontinuidades Interiores desarrollada por Fernández y Ayala (2006) para modelar el agrietamiento y un modelo de daño (Fernández y Ayala, 2004) para reproducir el comportamiento constitutivo de la discontinuidad.

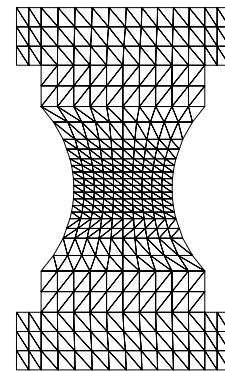


Figura 5. Tipo de malla empleada en el análisis numérico

placas de apoyo y concreto en el espécimen. En el acero se empleó un modelo constitutivo elástico lineal con módulo de elasticidad $E=200000$ MPa, y

relación de Poisson $\nu=0.35$. En el concreto se emplearon como propiedades elásticas la E experimental promedio de cada espécimen (Tabla 2) y una $\nu=0.12$, así como un modelo de daño (Fernández y Ayala, 2004) definido por la curva de ablandamiento del material (función de $f_{t\text{ mat}}$ y $G_{f\text{ mat}}$). Los valores experimentales promedio se presentan en la Tabla 2 y fueron utilizados como parámetros de fractura del material en los análisis preliminares del modelo numérico.

Tabla 2. Valores de E_{exp} , $f_{t\text{ exp}}$ y $G_{f\text{ exp}}$ reportados en Van Vliet (2000)

Especimen	D (mm)	E (MPa)	f_t (MPa)	G_f (N/m)
B	100	38500	2.97	124.32
C	200	39810	2.75	124.92
D	400	42800	2.30	127.34

Resultados preliminares del modelo numérico

En esta sección se presentan los resultados del modelo numérico obtenidos al emplear como propiedades constitutivas del material ($f_{t\text{ mat}}$ y $G_{f\text{ mat}}$) las propiedades reportadas experimentalmente ($f_{t\text{ exp}}$ y $G_{f\text{ exp}}$). Las curvas de respuesta P - δ obtenidas del modelo numérico (Fig. 7) reprodujeron de manera satisfactoria el comportamiento de la curva experimental en la zona elástica. Sin embargo, las curvas de respuesta del modelo numérico en la zona de ablandamiento no reprodujeron de manera satisfactoria el comportamiento experimental, ya que quedó por debajo de los valores promedio experimentales. Adicionalmente, el modelo numérico subestimó la carga máxima promedio experimental. Por lo anterior, las propiedades del material a emplearse en el modelo numérico no pueden ser directamente tomadas de la información experimental.

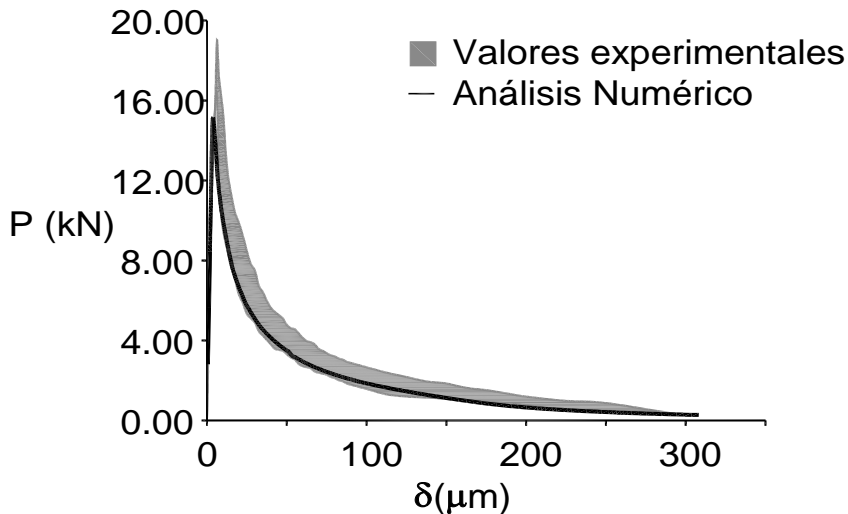


Figura. 7. Comparación de la curva de respuesta P - δ obtenida para el espécimen C y los datos experimentales.

Análisis de sensibilidad de los parámetros de fractura.

Para conseguir que el modelo reproduzca de forma satisfactoria los datos experimentales se planteó un ajuste al modelo numérico mediante la adecuación de los parámetros de fractura del material $f_{t\text{ mat}}$, $w_{c\text{ mat}}$ y $G_{f\text{ mat}}$. Esto se realizó por medio de análisis de sensibilidad de cada uno de estos parámetros, en los que se observó su influencia en la curva de respuesta P - δ . En este artículo no se presentan los resultados del análisis de sensibilidad de $w_{c\text{ mat}}$ debido a que tiene una contribución poco significativa a la curva de respuesta P- δ .

Resistencia a tensión f_t

En este análisis de sensibilidad se determinó el efecto de variar la resistencia a tensión del material ($f_{t\text{ mat}}$) en las curvas de respuesta P - δ . El parámetro $f_{t\text{ mat}}$ se introdujo como dato en el análisis numérico, empleándose en este estudio los valores de 0.80, 0.90, 1.00, 1.10 y 1.20 veces el valor de la resistencia a tensión experimental ($f_{t\text{ exp}}$).

En la Figura 8 se grafican las curvas de respuesta obtenidas para 0.90, 1.00 y 1.20 veces $f_{t\text{ exp}}$. Los resultados del análisis numérico de todos los especímenes indicaron que la variación de $f_{t\text{ mat}}$ afecta principalmente el valor de la carga máxima y que no afecta significativamente el área bajo la curva P- δ .

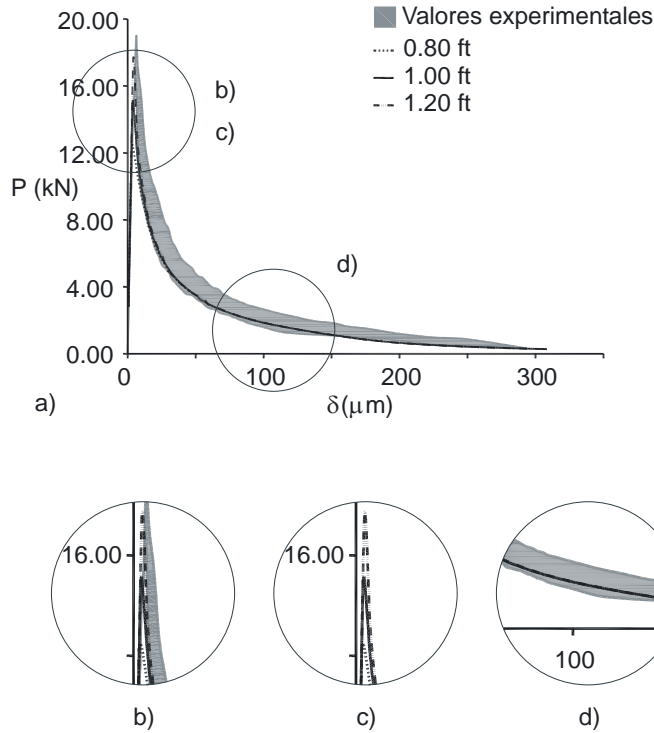


Figura 8. a) Curvas de respuesta P- δ obtenidas con la variación del parámetro $f_{t\text{ mat}}$ para el espécimen B, b) Cargas máximas obtenidas comparadas con los datos experimentales, c) Cargas máxima obtenidas sin la comparación con los datos experimentales, d) Zona de ablandamiento de la curva P- δ .

En la Figura 9 se grafica en el eje vertical el valor de la carga máxima obtenida del análisis numérico por el MEF empleando la resistencia a tensión del material $P_{u\text{ MEF}}(f_{t\text{ mat}})$ normalizado con respecto a la carga máxima obtenida del análisis numérico por el MEF empleando el valor de la resistencia a tensión promedio experimental $P_{u\text{ MEF}}(f_{t\text{ exp}})$, en el eje horizontal se grafica la resistencia a tensión del material $f_{t\text{ mat}}$ normalizada a su vez con respecto al

valor experimental $f_{t\text{ exp}}$. En esta figura se observa una relación lineal entre la carga máxima y la resistencia a tensión en todos los especímenes. Con base en esta grafica se determinó la resistencia a tensión del material $f_{t\text{ mat}}$ que lograría reproducir la carga máxima del experimento, que corresponde a los valores de $f_{t\text{ mat}} / f_{t\text{ exp}}$ iguales a 1.200, 1.212 y 1.228 para los especímenes B, C y D, respectivamente.

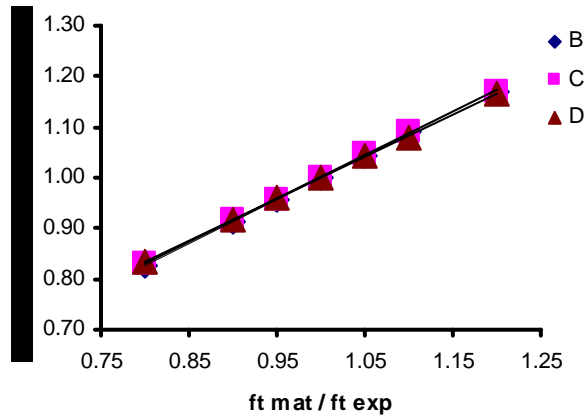


Figura 9. Variación de $P_{u\text{ MEF}}$ con respecto a $f_{t\text{ mat}}$.

Energía de fractura G_f

La definición de la forma de la curva de ablandamiento $\sigma - w$ es necesaria para determinar la energía de fractura del material ($G_{f\text{ mat}}$) que debe ser empleada en el modelo numérico. En la literatura técnica existen varias curvas de ablandamiento, entre las cuales se analizaron tres para este estudio: Moelands – Reinhardt (TNO, 2002), Hordijk (Hordijk, 1992) y exponencial (Shah *et al.*, 1995). En las curvas $P - \delta$ obtenidas empleando las curvas de ablandamiento antes citadas en los análisis numéricos, se observó que con las dos primeras se presentaba un ajuste deficiente, mientras que la tercera presentaba un mejor ajuste; sin embargo, la curva exponencial no posee una expresión analítica para calcular G_f , lo cual impide que pueda ser empleado para el análisis de sensibilidad de $G_{f\text{ mat}}$.

Por lo anterior, en este estudio se propuso emplear una curva de ablandamiento multilineal que sea capaz de reproducir satisfactoriamente los resultados experimentales y que pueda ser fácilmente modificada para efecto de variar la energía de

fractura. Se propuso emplear la forma de la curva de ablandamiento obtenida para el espécimen B (determinada de la información experimental) para todos los especímenes y se justifica su uso con base en: (1) las curvas determinadas para los especímenes deben comportarse de forma cada vez más similar a la curva real del material conforme se disminuye el tamaño y (2) la energía de fractura es aproximadamente igual para los tres especímenes estudiados.

En la Figura 10 se presentan las curvas $P - \delta$ obtenidas en este análisis de sensibilidad. La curva de ablandamiento propuesta presenta un mejor ajuste de los resultados experimentales para la zona de ablandamiento con relación a las tres curvas antes estudiadas (Pérez, 2005) y se observa en la Fig. 10 que la variación de la energía de fractura afecta la parte descendente de la curva de respuesta $P - \delta$, mientras que no afecta de manera notable el valor de la carga máxima.

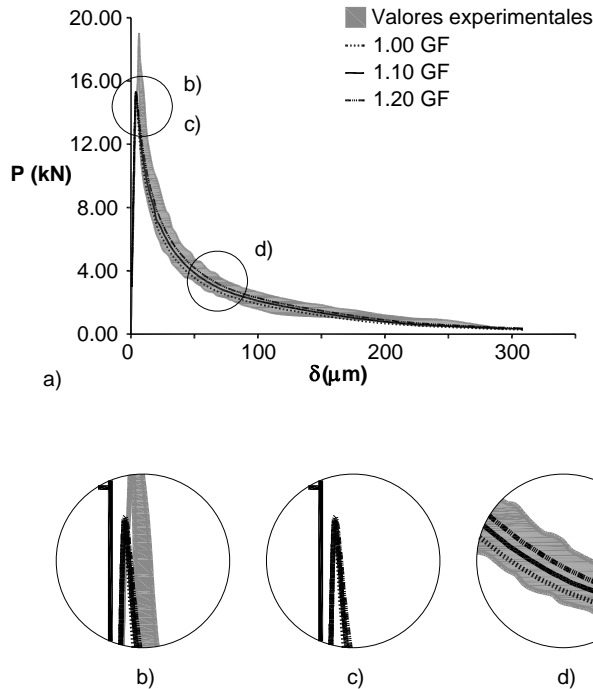


Figura 10. a) Curvas de respuestas $P - \delta$ obtenidas para la variación del valor de $G_{f\text{ mat}}$ para el espécimen B, b) Cargas máximas obtenidas comparadas con los datos experimentales, c) Cargas máximas obtenidas sin la comparación con los datos experimentales y d) zona de ablandamiento de la curva $P - \delta$.

En la Figura 11 se presenta la variación de la energía de fractura obtenida de aplicar el procedimiento de Van Vliet con los resultados del análisis numérico del

MEF ($G_{F_{MEF}}$), con respecto a la energía fractura del material ($G_{F_{mat}}$), ambos normalizados con respecto al

valor reportado experimentalmente $G_{F_{exp}}$. Con base en esta información se puede establecer que los factores 1.20, 1.15 y 1.10 ($G_{F_{mat}} / G_{F_{exp}}$) permiten reproducir con el modelo numérico lo observado experimentalmente en los especímenes B, C y D, respectivamente.

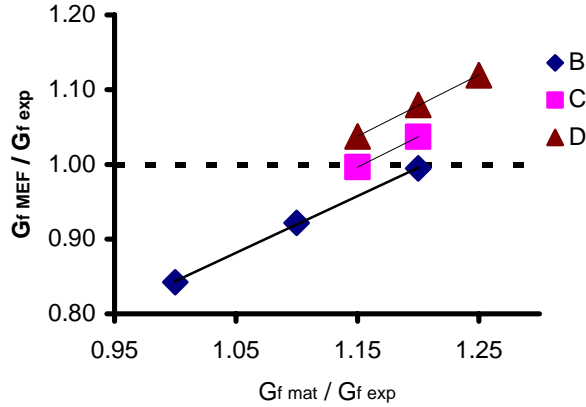


Figura 11. Variación de los valores de $G_{F_{MEF}}$ con respecto a $G_{F_{mat}}$.

Caracterización de las propiedades del material

De los análisis de sensibilidad presentados en las secciones anteriores se determinaron los valores de los parámetros de fractura del modelo numérico que permiten reproducir el comportamiento experimental de los especímenes. En la Tabla 3 se presentan dichos

valores y en la Fig. 12 se presentan las curvas de ablandamiento correspondientes. En esta figura se observa que las curvas de ablandamiento propuestas para los diferentes especímenes tienen casi la misma forma, variando únicamente el valor de f_t .

Tabla 3. Valores de los parámetros de fractura del material $f_{t_{mat}}$ y $G_{F_{mat}}$ del modelo numérico

Especímen	D (mm)	$f_{t_{mat}}$ (MPa)	$G_{F_{mat}}$ (N/m)
B	100	3.56	149.75
C	200	3.33	143.48
D	400	2.82	138.28

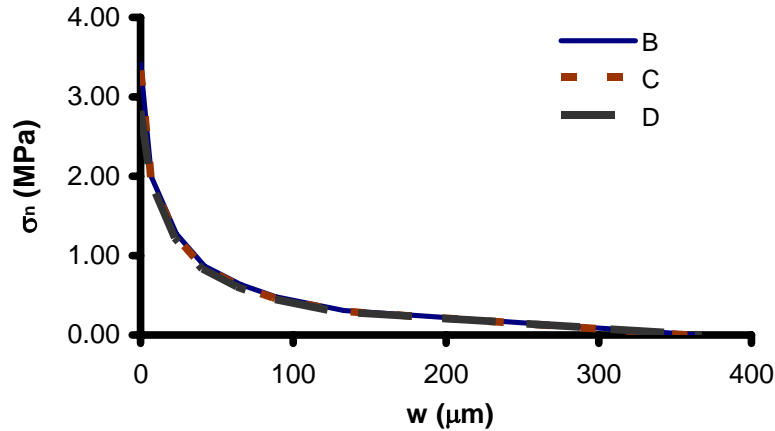


Figura 13. Curvas de ablandamiento del material caracterizadas para la modelación numérica.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Curvas carga - deformación

Las propiedades de fractura determinadas en el apartado anterior permiten reproducir numéricamente

el comportamiento experimental promedio de los especímenes, como se muestra en las Figuras 14 y 15.

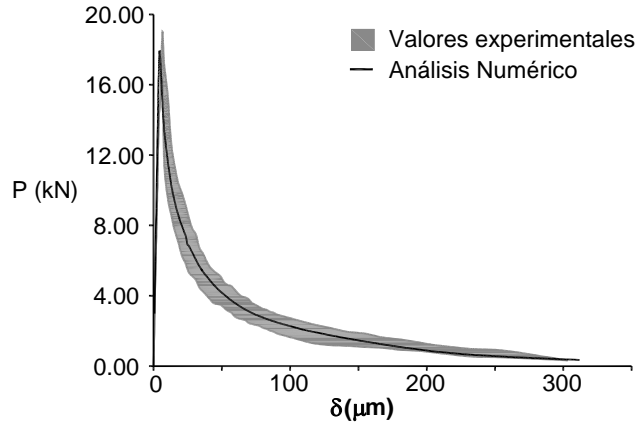


Figura 14. Curvas de respuesta P - δ obtenidas para el espécimen B.

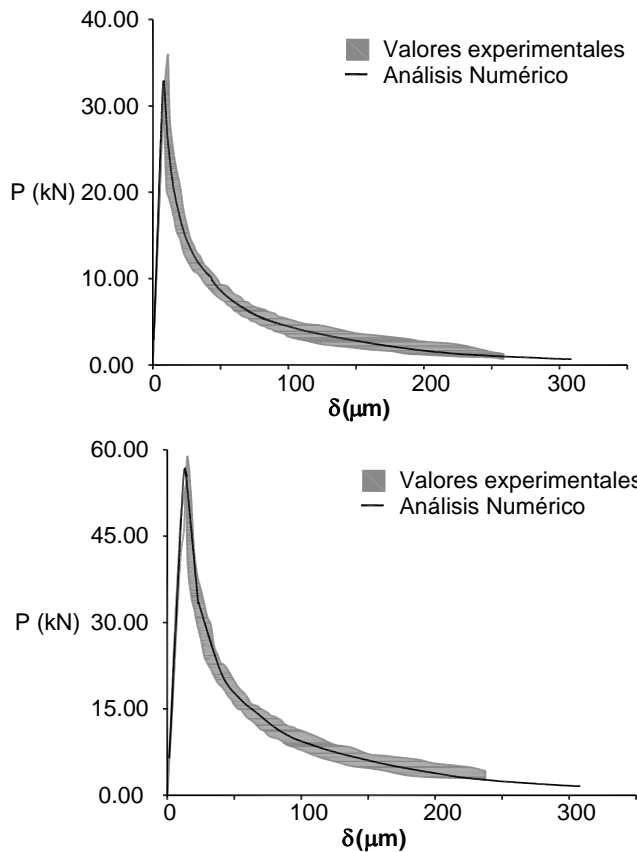


Figura 15. Curva de respuesta P - δ obtenida para los especímenes C y D.

Distribución de esfuerzos en la sección transversal

La herramienta numérica empleada en este trabajo permite mejorar el entendimiento sobre la

fenomenología del experimento, ya que permite aproximar la distribución de los esfuerzos en la zona entallada del espécimen (Figura 1) donde se produce

el agrietamiento. Para este propósito se grafica en la Figura 16 la distribución de esfuerzos a lo largo del ancho de la zona entallada (b) para la carga máxima obtenida mediante el modelo numérico y se compara con la ecuación empleada por Van Vliet (Ec. 2) en la cual se considera una distribución uniforme de los esfuerzos. En esta figura se identifica un valor máximo en la distribución de los esfuerzos; a la derecha de este valor se observa una disminución en los esfuerzos asociada al agrietamiento del material,

mientras que a la izquierda de este punto el material es elástico lineal y la disminución en el nivel de esfuerzos está asociada a la excentricidad de la carga. La resistencia a tensión del material calculada en este trabajo ($f_{t,mat}$) corresponde al valor máximo observado en la Figura 16, mientras que el valor reportado experimentalmente de la resistencia a tensión ($f_{t,exp}$) corresponde al promedio de los esfuerzos en la sección transversal.

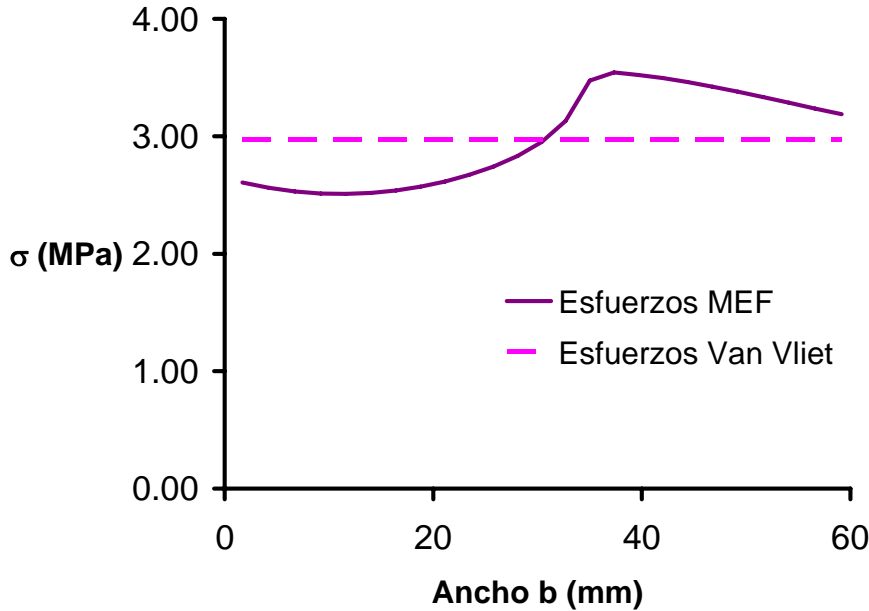


Figura 16. Distribución de esfuerzos en la zona central del espécimen B obtenidos mediante el modelo numérico y la ecuación empleada por Van Vliet.

CONCLUSIONES

Los resultados presentados en este trabajo permiten establecer las siguientes conclusiones:

La caracterización del material por medio de la selección de la forma de la curva de ablandamiento y del ajuste de los parámetros de fractura permite reproducir de forma satisfactoria los resultados experimentales reportados.

Se identificaron dos valores distintos de los parámetros de fractura: uno correspondiente al promedio experimental y otro correspondiente al del

modelo numérico. Los autores consideran que el valor numérico es representativo del comportamiento del material.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo brindado por el “Programa de Mejoramiento al Profesorado” a través del proyecto de investigación identificado con clave PROMEP/103.5/03/1125 y a la Universidad Autónoma de Yucatán. El segundo autor agradece al CONACYT el apoyo económico brindado para la realización de sus estudios de maestría.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Crisfield M. A. (1997) “Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures”, Volumen 2, John Wiley and Sons, Inglaterra.

- Fernández L., Ayala G. (2004). Constitutive modeling of discontinuities by means of Discrete and Continuum Approximation and Damage Models, "International Journal of Solids and Structures", Elsevier, 41, 1453-1471.
- Fernández L., Ayala G. (2006). A unifying formulation of the Discrete and Continuum Approximations for Embedded Discontinuities, "Numerical Methods for Partial Differential Equations", John Wiley and Sons, 920-935.
- Hordijk D. (1992). Tensile and tensile fatigue behaviour of concrete; experiments modelling and analysis, "HERON", Universidad Tecnológica de Delft, 37, 1 – 79.
- Pérez H. (2005). "Análisis por modelación numérica del efecto de tamaño en la fractura de elementos de concreto simple", Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de Yucatán, México.
- Shah S., Swartz S. E., Ouyang, C. (1995). "Fracture Mechanics of concrete", John Wiley and Sons, E. U.
- Taylor R., (2004). "FEAP – Finite Element Analysis Program. Version 7.3". Universidad de California en Berkeley, E.U.
- TNO Building and Construction Research (2002). "DIANA: User's manual release 8.1. Material Library". De Witte y Kikstra (Eds.), TNO Building and Construction Research, Department of Computational Mechanics, Delft, Holanda.
- Van Vliet M. (2000). "Size effect in tensile fracture of concrete and rock". Tesis de Doctorado, Universidad Tecnológica de Delft, Holanda.

Este documento se debe citar como:

Fernández-Baqueiro, L. E., Pérez, H. A., Varela, J. L. (2006). **Caracterización de los parámetros de fractura del concreto simple mediante un análisis numérico**. Ingeniería, Revista Académica de la FI-UADY, 10-3, pp.23-34, ISSN: 1665-529X