

Modelación y análisis de un sistema híbrido: Un caso de estudio con un sistema de tanques

Cruz Jiménez B. J.¹

Recibido: 11 de octubre de 2005 – Aceptado: 7 de marzo de 2006

RESUMEN

Los sistemas híbridos son una clase de sistemas dinámicos donde el comportamiento a analizar es definido por la interacción de dinámicas continuas y discretas. Debido a la complejidad y a la diversidad de los sistemas híbridos, es muy difícil que una herramienta se pueda aplicar a cualquier sistema y conservar las mismas ventajas y propiedades. Por esta razón, actualmente no existe una herramienta o metodología general y sistemática para la modelación de sistemas híbridos, como las existentes en la industria de manufactura o procesos. Es importante encontrar una metodología óptima que permita la modelación, análisis y simulación de un sistema híbrido. Este artículo presenta una metodología para el modelado y análisis de sistemas híbridos, ya que en la actualidad no existe un enfoque totalmente integrado para esta clase de sistemas. Dicha metodología se aplica a un caso específico de un sistema de tanques y se comprueban el modelo y análisis obtenidos mediante una simulación.

Palabras clave: autómatas híbridos, nodos, transiciones, tiempo de residencia, ciclo límite.

Modelling and analysis of a hybrid system: A case of study with a tank system

ABSTRACT

Hybrid systems are a type of dynamic systems in which the behaviour to analyze is defined by the interaction of continuous and discrete dynamics. Due to the complexity and diversity of the hybrid systems, it is very difficult to apply one tool to a system and maintain the same advantages and properties. For this reason, nowadays there is not yet available a tool or general and systematic methodology for modelling hybrid systems, as the existent ones in the manufacturing or processing industry. It is important to develop a good methodology that allows the modelling, analysis and simulation of a hybrid system. This article presents a methodology for the modelling and analysis of hybrid systems, since at the present time a completely integrated one does not exist for this type of systems. This methodology is applied to the specific case of a tank system and the model and analysis obtained are corroborated by means of a simulation.

Keywords: hybrid automata, nodes, transitions, residence time, limit cycle.

¹ Profesor-Investigador del Cuerpo Académico de Mecatrónica de la FIUADY. e-mail: bcruz@uady.mx

1. INTRODUCCIÓN

El término “sistema híbrido” es usado para definir una clase de sistemas con comportamientos definidos por entidades o procesos de distintas características. Estos sistemas contienen típicamente variables o señales que toman valores de manera continua y variables discretas que toman valores dentro de un conjunto finito de posibilidades.

Existen muchas razones para usar modelos híbridos para representar el comportamiento dinámico de tales sistemas. Una razón importante es la reducción de complejidad del modelo en orden, por ejemplo, en lugar de tener que representar las relaciones dinámicas a partir de un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales de orden superior, se puede representar el mismo sistema por un conjunto de ecuaciones simples, obteniendo así modelos simples mediante una logística de conmutación entre dichos modelos, usualmente la teoría de grafos; esta es la teoría más común en el modelado físico de fenómenos. En control, la conmutación entre sistemas dinámicos simples ha sido usada en la práctica por muchas décadas. Los esfuerzos recientes en la investigación de sistemas híbridos típicamente se centran en el análisis del comportamiento dinámico de los mismos y tienen como meta el diseño de controladores con una estabilidad y funcionamiento garantizados.

La mayoría de los procesos industriales se pueden considerar sistemas dinámicos ya que sus salidas dependen de entradas y salidas anteriores. En la mayoría de las industrias existen procesos que pueden ser del tipo continuo, tipo discreto y los que combinan ambos aspectos. Éstos últimos dan lugar a lo que se conoce como sistemas dinámicos híbridos. Durante su operación, siempre será importante el poder realizar un análisis y evaluación del desempeño de los procesos actuales para verificar si éstos cumplen las especificaciones de acuerdo a lo planeado. También, es importante el contar con una herramienta para realizar la modelación de dichos sistemas. Esta herramienta debe auxiliar en la realización de una simulación del modelo del proceso obtenido, con el fin de conocer y entender su comportamiento ante diferentes condiciones o variaciones en la operación. Sin embargo, en la actualidad, la mayoría de los métodos y herramientas utilizadas para el análisis, modelación y simulación de procesos se encuentran orientados ya sea a procesos

continuos, o bien, a procesos basados en eventos discretos. La limitación de estas metodologías y herramientas aparece cuando se aplican a un proceso con características continuas y discretas, por ejemplo: los procesos batch donde en general no se puede realizar una simulación en la cual se observe explícitamente la evolución dinámica tanto de la entidad discreta como de la entidad continua así como la interacción que existe entre ambas entidades.

1.1 DIFERENTES ENFOQUES EN EL MODELADO Y ANÁLISIS DE SISTEMAS HÍBRIDOS

Al observar la literatura, salta a la vista que existen muchos enfoques para el modelado, análisis y síntesis de los sistemas híbridos. En términos generales, los enfoques difieren en lo relativo al énfasis en las dinámicas continuas y discretas o en la complejidad de las mismas, y en cuanto a si enfatizan los resultados de análisis y síntesis, sólo el análisis o únicamente la simulación. En un extremo del espectro se encuentran los enfoques en los que se abordan los sistemas híbridos que representan extensiones de ideas teóricas de sistemas que se describen por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias para incluir tiempo y variables discretas que presentan saltos, o extender los resultados a sistemas conmutados. Típicamente, estos enfoques son capaces de manejar dinámicas continuas complejas y enfatizan los resultados de estabilidad. En el otro extremo del espectro, hallamos enfoques a los sistemas híbridos que están incorporados a los modelos y métodos de la ciencia computacional, que representan extensiones de las metodologías de verificación de los sistemas discretos a los sistemas híbridos. Típicamente, estos enfoques son capaces de manejar dinámicas discretas complejas descritas por autómatas finitos y enfatizan los resultados de análisis (verificación) y las metodologías de simulación. Existen metodologías adicionales que comprenden el resto del espectro, las cuales combinan conceptos de los sistemas de control continuo descritos por ecuaciones diferenciales o de diferencia lineales y no lineales y el control supervisorio de los sistemas de eventos discretos que son descritos por autómatas finitos y redes de Petri (Antsaklis *et al.*, 1998).

Se han empleado diferentes paradigmas matemáticos para modelar sistemas híbridos que revelan la diversidad de las investigaciones.

(Tavernini, 1987) usó autómatas diferenciales, en (Nerode *et al.*, 1993) adoptaron un enfoque teórico de autómatas para los sistemas compuestos de ecuaciones diferenciales ordinarias en interacción y autómatas finitos, en (Antsaklis *et al.*, 1993) adoptaron un enfoque de sistemas dinámicos de eventos discretos; (Brockett, 1993) combinó las ecuaciones diferenciales ordinarias y los fenómenos discretos para describir sistemas de movimiento; (Back *et al.*, 1993) proporcionan un marco de referencia adecuado para la simulación numérica. En (Alur *et al.*, 1993) usaron autómatas híbridos, una extensión de los autómatas temporizados, y (Benveniste, 1998) propuso un marco de referencia de comportamiento de modelado de sistemas híbridos con énfasis en la naturaleza de composición y el uso de tiempo multiforme.

Los autómatas temporizados y los autómatas híbridos han sido usados por varios investigadores para el modelado y verificación de los sistemas híbridos. (Alur y Dill, 1994) propusieron autómatas temporizados para modelar el comportamiento de los sistemas de tiempo real en el tiempo. Los autómatas temporizados se estudian desde la perspectiva de la teoría del lenguaje formal. La teoría se aplica a la verificación automática de los requisitos de tiempo real de las máquinas de estado finito. En (Alur *et al.*, 1995) introdujeron el marco de referencia de autómatas híbridos como un modelo y el lenguaje de especificación para sistemas híbridos.

En (Puri y Baraya, 1994) se presentan dos métodos para la verificación de sistemas híbridos. El formalismo de modelado usado es el de los autómatas híbridos. La verificación está basada en abstraer la dinámica continua del sistema híbrido mediante dinámicas continuas más simples. (Desphande y Baraya, 1996) usan autómatas finitos no determinísticos para modelar el comportamiento discreto e inclusiones diferenciales para modelar el comportamiento continuo de los sistemas híbridos y se diseña un controlador híbrido que produce trayectorias viables.

En (Branicky 1998) se presenta algunas herramientas de análisis para los sistemas conmutados e híbridos. En particular, se usan funciones múltiples de Lyapunov para el análisis de estabilidad de los sistemas conmutados y se usan sistemas de funciones iterativas para la estabilidad de Lagrange. (Henzinger *et al.*, 1998)

presenta una metodología para analizar algorítmicamente sistemas híbridos no lineales traduciéndolos primero a autómatas híbridos lineales, y entonces usando herramientas de verificación de modelos automatizados.

El autómata finito es un modelo de base para representar las dinámicas discretas de los sistemas y su interacción con el medio. Como este modelo estaba muy limitado se hizo una ampliación del mismo, introduciendo el tiempo en los estados discretos, como una forma de interacción continua. Sin embargo, debido a la creciente demanda de modelos más exactos y generales para los diferentes sistemas que tenían en su estructura fenómenos tantos discretos como continuos, se realizó una extensión del autómata finito, agregando aparte del tiempo en los estados discretos, ecuaciones continuas, lo que dio lugar al autómata híbrido (Favela *et al.*, 1998). Así, el modelo del autómata híbrido está basado en una representación explícita tanto de las dinámicas continuas del sistema como de las discretas. Las dinámicas continuas se representan por modelos de estados mediante ecuaciones diferenciales que las describen. Las dinámicas discretas se representan mediante el modelo del autómata finito, donde se observa explícitamente la lógica de conmutación del mismo (Favela *et al.*, 1999).

En (Balluchi *et al.*, 2003) se introducen las nociones genéricas para determinar los estados estables asintóticos en los sistemas híbridos y se dan las condiciones suficientes para alcanzar un estado final. Dichas condiciones se pueden verificar aún si alguno de los subsistemas continuos del sistema híbrido no es observable y se relacionan con el tiempo de permanencia mínimo y máximo en cada estado. En (Morari, 2005) se ilustra la evolución de los sistemas híbridos en el campo del control, primero con algunos ejemplos históricos y luego en el área emergente de sistemas híbridos. Resaltan los desarrollos teóricos y se menciona el software extenso que ayuda a traer la teoría a ejemplos prácticos. Se presenta una perspectiva para los sistemas híbridos en el área de control.

Se han propuesto numerosas herramientas de simulación para la simulación, verificación e implementación de los sistemas híbridos. (Henzinger y Ho, 1995) propusieron HYTECH como una herramienta automática para analizar sistemas híbridos. (Taylor y Kebede, 1996) desarrollaron herramientas en MATLAB para el modelado y simulación de sistemas híbridos. En

(Daws *et al.*, 1996) desarrollaron KRONOS como plataforma de verificación para sistemas complejos en tiempo real. En (Inihov *et al.*, 1997) desarrollaron el programa *Model Vision Studium* como una herramienta para la investigación numérica de sistemas híbridos utilizando la tecnología de programación orientada a objetos. SHIFT, propuesto por (Desphande *et al.*, 1998) es un lenguaje de programación para describir redes dinámicas de autómatas híbridos. Los modelos de SHIFT ofrecen el nivel apropiado de abstracción para describir aplicaciones complejas como los sistemas automatizados para autopistas cuya operación no puede ser capturada fácilmente por los sistemas convencionales. (Foullas *et al.*, 2004) propone un marco de referencia para el modelado de sistemas de potencia usando sistemas híbridos. El sistema se construye y simula en el ambiente Simulink™ y Stateflow™ de MatLab™.

En el análisis del comportamiento dinámico de sistemas influenciados por la ocurrencia de eventos discretos, hay dos importantes líneas de investigación: la que se basa en el modelo del autómata y la que se basa en las redes de Petri. El interés de este trabajo se basa en la modelación y análisis de sistemas híbridos mediante el modelo del autómata híbrido continuo lineal invariante en el tiempo, propuesto por (Favela *et al.*, 1999).

2. MODELADO DEL SISTEMA DE TANQUES

Considere el sistema de tanques de la Figura 1, se asume que los dos componentes de flujos, el componente A del tanque 1 y el componente B del tanque 2, son mezclados en el tanque 3. Adicionalmente se asume que cuando los flujos de entrada q_A y q_B , están activados, son aproximadamente constantes. La razón para esta suposición es que el flujo q_A del tanque 1 es controlado por una bomba de encendido / apagado que da un flujo casi constante. En el tanque 2 el nivel es controlado por una válvula de entrada por medio de sensores binarios. Esto implica que el flujo q_B es aproximadamente constante cuando la válvula de salida está abierta. Se requiere efectuar el mezclado de los dos componentes cuidando los efectos de la reacción; después del mezclado se deposita la mezcla en un recipiente. A continuación se

describen los pasos para obtener el modelo del sistema.

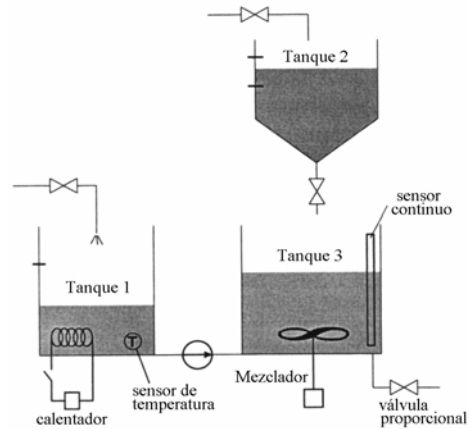


Figura 1. Mezclado de dos sustancias químicas.
Paso 1. Identificar las entidades continuas y/o discretas que integran el proceso.

Entidades continuas

- El flujo q_A del tanque 1.
- El flujo q_B del tanque 2.
- El volumen del tanque 3.
- Calentador (comportamiento de la temperatura).

Entidades discretas

- Estado de la bomba del tanque 1 (encendida o apagada).
- Estado de la válvula de salida del tanque 2 (encendida o apagada).
- Estado de la válvula de salida del tanque 3 (encendida o apagada).
- Agitador (σ_a , encendido o apagado).
- Sensor de temperatura (σ , que controla al actuador del calentador). Cuando se alcance la temperatura deseada el sensor se activa y cuando decae la temperatura se desactiva.

Paso 2. Modelación de la parte continua. Esto implica seleccionar el modelo matemático que mas se ajuste a las propiedades físicas del comportamiento continuo a modelar. Hay que recordar que se pueden utilizar desde ecuaciones diferenciales simples hasta muy complejas para representar las dinámicas continuas.

Podemos definir los volúmenes parciales de los componentes A y B como:

$$\begin{aligned} \dot{V}_A(t) &= q_A(t) \\ \dot{V}_B(t) &= q_B(t) \end{aligned} \quad (1)$$

El volumen V_A y V_B se definen como variables de estado en I y el volumen total en el tanque 3 en modo de llenado es

$$V(t) = V_A(t) + V_B(t).$$

La reducción en el volumen del tanque 3 se define como:

$$\dot{V} = -q_C \quad (2)$$

donde $-q_C$ es el flujo de descarga del tanque 3.

Ahora se tiene que considerar la dinámica del comportamiento de la temperatura. Asumimos que la temperatura del tanque 1 está controlada por un actuador de encendido/apagado. Cuando el calentador está encendido, la dinámica de la temperatura denotada por la variable x está descrita por la ecuación de flujo:

$$\dot{x} = 5 - 0.1x \quad (3)$$

Cuando el calentador está apagado, la temperatura disminuye de acuerdo a la ecuación de flujo:

$$\dot{x} = -0.1x \quad (4)$$

Hay un reloj representado por la variable y que mide el tiempo total que el sistema permanece en el estado de encendido, de esta manera se protege al sensor de temperatura de que no exceda el tiempo máximo de vida a la que puede estar sometido a cierta temperatura, esto es:

$$\dot{y} = 1 \quad (5)$$

El calentador se apagará tan pronto la temperatura se incremente hasta 22°C o si el sensor de temperatura ha alcanzado su tiempo de vida máximo de funcionamiento confiable, es decir cuando $y = 600$ minutos. El calentador se volverá a encender cuando la temperatura disminuya a 18°C y el sensor de temperatura está operando en su tiempo de vida confiable, es decir $y < 600$ minutos. Consideraremos que inicialmente el calentador está encendido, la temperatura es de 10°C y el sensor está nuevo ($y = 0$).

Paso 3. Modelación de la parte discreta. Aquí se determina el número de estados discretos necesarios basado en los diferentes modos de comportamiento físico, las entradas y las salidas discontinuas.

Se definen cuatro estados discretos. El estado S_1 expresa que el flujo q_B se encuentra activado y el flujo q_A desactivado (debido a que todavía no se alcanza la temperatura adecuada). El estado S_2 se define para indicar que ambos flujos están activos y se ha alcanzado la temperatura de la mezcla A. El estado S_3 indica que el flujo q_A se encuentra activado y el flujo q_B desactivado. Un cuarto estado S_4 representa la mezcla de las dos sustancias y el vaciado del tanque 3.

Para el caso del sistema del calentador se definen dos estados discretos. El estado S_1 se define para indicar que el calentador está encendido. El estado S_2 indica que el calentador está apagado.

Paso 4. Analizar las acciones de control

- **Especificaciones para la parte continua**
Se tiene una condición de frontera en un tiempo final t_f :

$$\begin{aligned} V_A(t_f) &= V_{Af} \\ V_B(t_f) &= V_{Bf} \end{aligned} \quad (6)$$

Para prevenir reacciones no deseables cuando los dos componentes son mezclados, también se requiere que:

$$k_1 V_A(t) \leq V_B(t) \leq k_2 V_A(t) \quad (7)$$

Se asume también que los flujos q_A y q_B cuando están presentes, están relacionados por $q_B < k_1 q_A$. La pendiente de las trayectorias esta dada por:

$$\frac{dV_B}{dV_A} = \frac{q_B(t)}{q_A(t)} \quad (8)$$

lo que define una región permitida para la evolución continua ilustrada en la Figura 2.

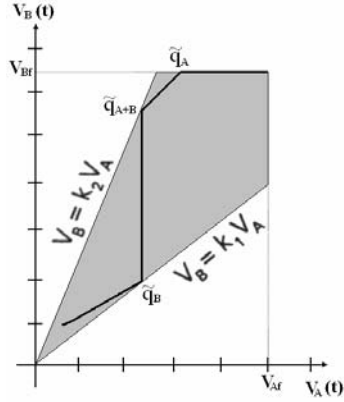


Figura 2. Región permitida que satisface las restricciones para la evolución continua.

Inicialmente el calentador está apagado y después de un tiempo se enciende, se desea mantener la temperatura entre 18 y 22 °C.

• **Especificaciones para la parte discreta**

Para asegurar que las especificaciones del sistema de tanques se puedan cumplir se toman diferentes acciones de control dentro de los estados discretos (nodos). En el nodo S_1 se toman acciones discretas sobre la bomba y el actuador de la válvula de salida del tanque 2 cuando $V_B(t) \geq k_2 V_A(t)$. En el nodo S_2 , se apaga la bomba del tanque 1, por lo que solo está presente el flujo q_B , esto es para cumplir con la condición de $V_B(t) \leq k_1 V_A(t)$ o cuando $V_A(t) \geq V_{Af}$. En el nodo S_3 , se cierra la válvula de salida del tanque 2, por lo que solo el flujo q_A está presente, para cumplir con la condición de $V_B(t) \geq V_{Bf}$. En el nodo S_4 se enciende el agitador y después de un determinado tiempo se apaga y se activa la válvula de descarga del tanque 3 por lo que el flujo q_C se hace presente.

En cuanto al sistema del calentador, en el nodo S_1 se activa el actuador que controla el encendido de la resistencia que calienta la mezcla A. En el nodo S_2 se apaga la resistencia. Dichos estados fueron definidos en función del sensor de temperatura binario.

Como se puede observar las acciones de control que se llevan a cabo para satisfacer las especificaciones, tanto continuas como discretas, son del tipo encendido o apagado. Lo que significa que no hay necesidad de tomar alguna acción continua directa sobre el sistema.

Paso 5. Integración de las entidades continuas y discretas. Utilizando el modelo del autómata híbrido para realizar la integración de las entidades.

Considere el modelo autómata híbrido del sistema de tanques de la Figura 3 definido como:

$$H = \{X, S, \text{flujo}, E, F, \Sigma, \text{init}\} \quad (9)$$

donde:

$$\begin{aligned} X &= \{V_A, V_B\} \\ S &= \{s_1, s_2, s_3, s_4\} \\ E &= \{T_1, \dots, T_9\} \\ F &= \{F(T_1), \dots, F(T_9)\} \\ \Sigma &= \{\sigma, \sigma_a\} \\ \text{init} &= \{V_A = q_A, V_B = q_B\} \end{aligned} \quad (10)$$

ecuaciones de flujo:

$$\begin{aligned} \dot{V}_A(t) &= q_A(t) \\ \dot{V}_B(t) &= q_B(t) \\ \dot{V} &= -q_C(t) \end{aligned} \quad (11)$$

Asumimos que el valor de las constantes es $k_1 = 0.8$ y $k_2 = 1.2$ y los límites para los volúmenes parciales en $V_{Af} = 10$ y $V_{Bf} = 9$.

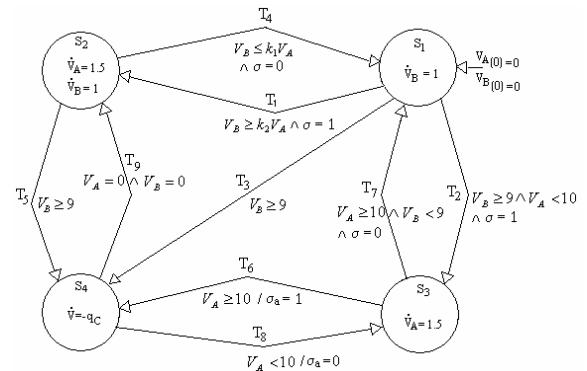


Figura 3. Modelo del autómata híbrido para el mezclado de dos sustancias.

Considere el modelo autómata híbrido del calentador ilustrado en la Figura 4 definido como:

$$H = \{X, S, \text{flujo}, E, F, \Sigma, \text{init}\} \quad (12)$$

donde:

$$\begin{aligned} X &= \{x, y\} \\ S &= \{s_1, s_2\} \\ E &= \{T_1, T_2\} \\ F &= \{F(T_1), F(T_2)\} \\ \Sigma &= \{\sigma\} \\ \text{init} &= \{x = 10, y = 0\} \end{aligned} \quad (13)$$

ecuaciones de flujo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 5 - 0.1x \\ \dot{y}(t) &= 1 \end{aligned} \quad (14)$$

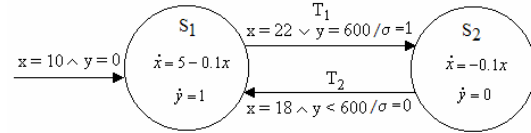


Figura 4. Modelo del autómata híbrido para el calentador.

Paso 6. Análisis del sistema híbrido obtenidos con el fin de asegurar que todas las condiciones previamente establecidas se cumplan.

A partir de las condiciones establecidas para la validación de las transiciones, podemos determinar si las transiciones planteadas en el sistema híbrido se habilitan o no. El primer modelo obtenido para este sistema se muestra en la Figura 3. Para este modelo se realiza el siguiente análisis para cada nodo.

Nodo _{orige} n	K _{in}	P _{jq}	K _{jq}	Nodo _{destino}	Condición para la validación de la transición
S ₁	V _A = 0 ∧ V _B = 0 V _A ≥ 10 ∧ V _B < 9	+∞	V _B ≥ k ₂ V _A V _A ≥ 10 ∧ V _B < 9 V _B ≥ 9	S ₂ S ₄ S ₃	K _{in} < K _{jq}
S ₂	V _B ≥ k ₂ V _A V _A = 0 ∧ V _B = 0	+∞	V _B ≤ k ₁ V _A V _B ≥ 9	S ₁ S ₄	K _{in} < K _{jq}
S ₃	V _B ≥ 9 ∧ V _A < 10 V _A < 10	+∞	V _A ≥ 10 ∧ V _B < 9 V _A ≥ 10	S ₁ S ₄	K _{in} < K _{jq}
S ₄	V _B ≥ 9 V _A ≥ 10	-∞	V _A ≤ 10 V _A = 0 ∧ V _B = 0	S ₃ S ₁	K _{in} < K _{jq}

Tabla 1. Análisis de la habilitación de las transiciones para el modelo del sistema de tanques.

Del resultado expresado en la Tabla 1 se observa que para el nodo S₁ tenemos que P_{jq} = +∞ (no existe un punto de equilibrio), por lo que la condición K_{in} < K_{jq} siempre se satisface y las transiciones T₁, T₂ y T₃ están habilitadas pero no todas son disparables a la vez. Como la transición T₃ está contenida en la transición T₂, se elimina para evitar conflictos, ya que en un tiempo dado ambas podrían llegar a cumplirse.

Para el nodo S₂ se tiene que P_{jq} = +∞. Así, para la habilitación de las transiciones T₄, y T₅ a la salida de este nodo, se debe satisfacer la

condición K_{in} < K_{jq}, lo que siempre ocurre, lo que significa que T₅ no debe estar presente ya que esto ocasionaría el desalojo del tanque.

Para el nodo S₃ se tiene que P_{jq} = +∞. Así, la condición que se debe satisfacer para que las transiciones T₆ y T₇ se habiliten es K_{in} < K_{jq}. Con esta condición se puede afirmar que todas las transiciones a la salida del nodo estarán habilitadas (para cualquier entrada del nodo) pero no todas son disparables a la vez.

Para el nodo S₄ e tiene que P_{jq} = -∞, la condición que se debe satisfacer para que las

transiciones T_8 y T_9 se habiliten es $K_{in} < K_{jq}$, lo que significa que cualquiera de las condiciones de salida será ejecutada.

Basados en el análisis anterior, considerando la dinámica de la temperatura el autómata híbrido de la Figura 5 garantizará la existencia de un ciclo límite para cualquier punto dentro de una región inicial definida.

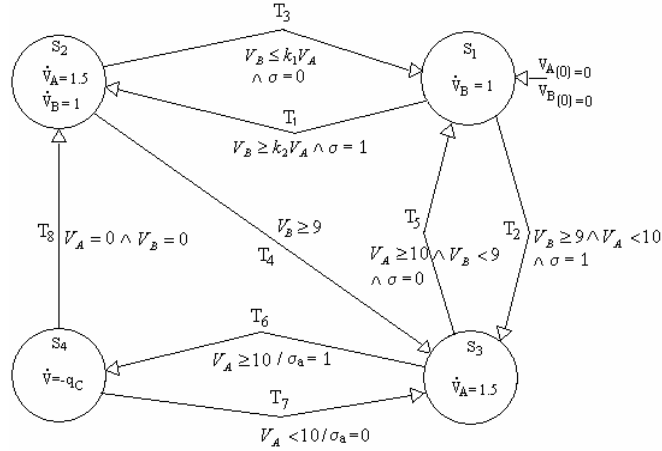


Figura 5. Sistema híbrido para el mezclado de dos sustancias.

Paso 7. Simulación del sistema y evaluación de resultados

Para llevar a cabo la simulación se empleó el programa *Model Vision Studium 3.0*, se asume que el flujo $q_A = 1.5$ y el flujo $q_B = 1$. Los volúmenes son inicialmente cero, condición que se debe mantener antes de preparar una nueva mezcla. El sensor de temperatura vigila que no se excedan los límites para la mezcla A, por lo que cuando se detecta que ha descendido por debajo de 18°C el calentador se activa.

El comportamiento del volumen V_A y el volumen V_B se muestran en la Figura 6.

Se puede observar en la Figura 6 como el comportamiento del sistema híbrido como después de un tiempo de estabilización tiende a una estructura cíclica. La variación del volumen de la mezcla se restringe a una región especificada por las condiciones del proceso. En la figura 7 se observa que el sistema híbrido del calentador tiende a estabilizarse después de un cierto tiempo; lo que indica que los cambios de temperatura no son tan drásticos por lo que se prolonga la vida del sensor de temperatura.

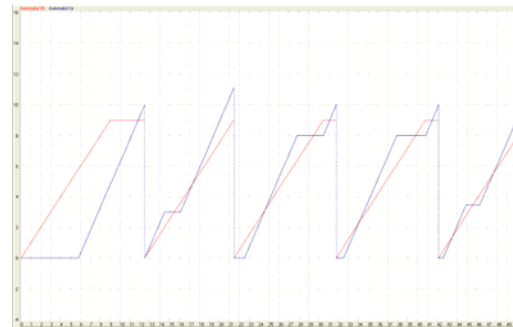


Figura 6. Comportamiento del volumen V_A respecto del volumen V_B .

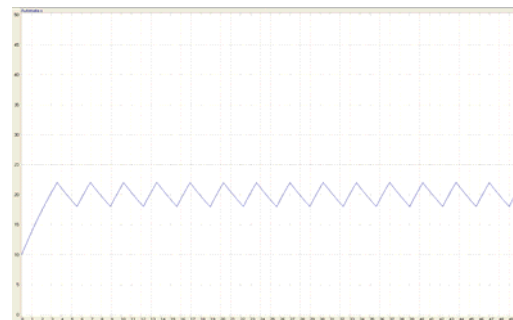


Figura 7. Comportamiento de la temperatura debido a las conmutaciones del sistema.

3. ANÁLISIS DEL SISTEMA DE TANQUES

Los sistemas híbridos pueden tener comportamientos muy peculiares, ya que involucran dinámicas continuas y discretas, por lo que para analizarlos es necesario contar con una herramienta que permita integrar el análisis de ambas dinámicas sin excluir ninguna. Con esta herramienta se pretende que los sistemas modelados aseguren un funcionamiento óptimo, además, se puede utilizar para la detección de fallas, así como para realizar ajustes en el control de dichos sistemas. Basado en el autómata híbrido obtenido, en esta sección se propone un algoritmo de análisis basado para sistemas híbridos con dinámicas continuas desacopladas. Se utiliza el concepto de tiempo de residencia y de las propiedades analíticas descritas en (Favela, 1999). A continuación se describen los pasos para ejecutar el análisis de dichos sistemas híbridos.

1. Calcular todos los puntos de equilibrio para cada nodo ($P_{jq} \forall S_j$) si es que existen. Este paso involucra el análisis de las ecuaciones diferenciales para interpretar su dinámica. Para el nodo S_1, S_2, S_3 se tiene que el punto de equilibrio es: $P_{ji} = +\infty$. Esto indica una dinámica continua creciente en forma de rampa. Para el nodo S_4 se tiene que la dinámica es decreciente, por lo que su punto de equilibrio es $P_{j4} = -\infty$.

2. Validar las transiciones de salida de cada nodo considerando sus transiciones de entrada y punto de equilibrio. Esto da lugar a que por simple inspección y de manera rápida se detecten las condiciones de salto que no están correctas o que nunca se van a cumplir.

3. Calcular el tiempo mínimo (∂_{\min}) y máximo (∂_{\max}) de residencia en los nodos basados en las ecuaciones (Favela, 1999):

$$\partial_j = \frac{1}{a_{jq}} \ln \left(\frac{K_{jq} - P_{jq}}{K_{in} - P_{jq}} \right) \quad \text{si } a_{jq} \neq 0 \quad (15)$$

$$\partial_j = \frac{K_{jq} - K_{in}}{b_{jq}} \quad \text{si } a_{jq} = 0 \quad (16)$$

y establecer las relaciones que permitan la habilitación o inhabilitación de las transiciones en los nodos. Para cada nodo existe un tiempo de residencia, que indica cuanto tiempo se debe esperar en el nodo antes de que sea disparada la

transición y cuanto tiempo se tiene antes de que la condición de disparo ya no sea válida.

4. Recorrer todas las posibles trayectorias que se generen, tomando en cuenta los tiempos de permanencia antes calculados. Para cada condición inicial existirá un tipo de comportamiento asociado tanto a la dinámica continua como discreta; por lo que se determinan los rangos de valores que generen diversas trayectorias.

Para S_1

$$V_A = 1.5\partial_{\min} + K_{in} \quad (17)$$

$$V_B = \partial_{\min} + K_{in}$$

Para S_2

$$V_B = \partial_{\min} + K_{in} \quad (18)$$

Para S_3

$$V_A = 1.5\partial_{\min} + K_{in} \quad (19)$$

Para S_4

$$V = -q_c \partial_{\min} \quad (20)$$

Basado en la solución de la ecuación continua y el tiempo de permanencia se puede saber la trayectoria que se genera para un K_{in} dado. En este caso las condiciones iniciales de entrada que se deben de mantener son que la suma de los volúmenes en el tanque sea igual a cero.

Valor de entrada al nodo	Nodo	Transición disparada
$V_A = V_B = 0$	S_1	T_1
$V_B \geq 9$	S_2	T_4
$V_A \geq 10$	S_3	T_6
$V_B = 1, V_A = 0$	S_4	T_8
$V_B \leq k_1 V_A$	S_2	T_3
$V_B \geq k_2 V_A$	S_1	T_1
$V_B \leq k_1 V_A$	S_2	T_3
$V_B \geq 9 \wedge V_A < 10$	S_1	T_2
$V_A \geq 10$	S_3	T_6
$V_B = 1, V_A = 0$	S_4	T_8
$V_B \leq k_1 V_A$	S_2	T_3

Tabla 2. Recorrido de trayectorias para el sistema híbrido de los tanques.

5. Verificar cuales trayectorias hacen que el sistema sea estable para establecer la existencia de un estado estable en el comportamiento continuo del sistema híbrido. En el caso de no encontrar una trayectoria que haga estable al sistema, se sugiere que se revise las especificaciones de control y se ejecute de nuevo el análisis del sistema.

Para la condición inicial especificada (volumen cero) se puede observar en la Tabla 2, que se genera una trayectoria inicial entre los nodos de $S_1 - S_2 - S_3 - S_4 - S_2$, como se observó en la Figura 6 es un comportamiento lento y errático debido a las condiciones iniciales. A medida que transcurre el tiempo la trayectoria es corta, caracterizada por $S_1 - S_3 - S_4 - S_2$ y el comportamiento tiende rápidamente a un estado estable.

4. CONCLUSIONES

La modelación de un sistema híbrido siempre presenta dificultades, por lo que es necesario contar con herramientas más precisas y generales para la modelación y el análisis de sistemas híbridos. En consecuencia, con la aplicación de

la metodología propuesta se obtienen resultados favorables. Además, el algoritmo de análisis permite comprobar si el modelado fue efectuado correctamente; proporcionando una herramienta para visualizar el comportamiento de los sistemas híbridos. Ya que basándose en el análisis de las condiciones establecidas para las transiciones, el diseño de un modelo de autómata híbrido puede asegurar un funcionamiento apropiado.

De esta manera, de las condiciones establecidas, se pueden proponer autómatas híbridos que aseguren la habilitación de ciertas transiciones discretas en un momento de tal manera que la conducta del sistema tienda hacia un ciclo límite deseado. Estas condiciones pueden usarse para diseñar una ley de control que optimice la trayectoria continua para lograr un tiempo de residencia más corto.

Se recomienda incluir en los comportamientos dinámicos especificaciones para la parte continua y discreta más complejas; generalización del algoritmo de análisis a sistemas híbridos con dinámicas continuas acopladas.

RERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Antsaklis, P.J., Koutsoukos, X., and Zaytoon, J. On hybrid control of complex systems: A survey. *European Journal of Automation*, 32(9-10):1023-1045, 1998
- Antsaklis, P., Stiver, J., and Lemmon, M. "Hybrid system modeling and autonomous control systems" In R.
- L. Grossman, A. Nerode, A. P. Ravn, and H. Rischel, editors, *Hybrid Systems*, volume 736 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 366-392. Springer-Verlag, 1993.
- Alur, R., Courcoubetis, C., Henzinger, T.A. and Ho, P-H. "Hybrid automata: An algorithmic approach to the specification and verification of hybrid systems". *Hybrid Systems I*, *Lecture Notes in Computer Science* 736, Springer. pp. 209-229, 1993.
- Alur, R. And Dill D. "The theory of timed automata". *Theoretical and Computer Science* 126. pp. 183-235, 1994.
- Alur, R., Courcoubetis, C., Halbwachs, N., Henzinger, T.A., Ho, P-H., Nicollin, X., Oliveiro, A., Sifakis, J. and Yovine, S. "The algorithmic analysis of hybrid systems". *Theoretical and Computer Science* 138. pp. 3-34, 1995.
- Branicky, M. "Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Special Issue on Hybrid Systems, 1998.
- Benveniste, A. "Compositional and uniform modelling of hybrid systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Special Issue on Hybrid Systems, 1998.
- Brockett, R.W. "Hybrid models for motion control systems". *Essays on Control: of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*. Kobe, Japan. pp. 1190-1195., 1993.
- Back, A., Guckenheimer, J. and Myers, M. (1993). "A dynamical simulation facility for hybrid systems". *Inter. J. of Computers & Math. with Appl.* 20:13. Berlin: Springer. pp. 255-267,

- Balluchi, A., Benvenuti, L., Di Benedetto, M.D., Sangiovanni-Vincentelli, A.L. “Observability for hybrid systems”. 42nd IEEE Conference on Decision and Control, 2003. Proceedings. pp. 1159-1164., 2003.
- Desphande, A. and Varaiya, P. “Viable control of hybrid systems”. Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control. Kobe, Japan. pp. 1196-1201, 1996.
- Desphande, A., Gollu, A. and Varaiya, P. “The shift programming language and run-time system for dynamic networks of hybrid automata”. Transactions on Automatic Control, Special Issue on Hybrid Systems, 1998.
- Daws, C., Oliveiro, A., Tripakis, S. and Yovine, S. “The tool KRONOS”. pp. 208-219, 1996. In Hybrid Systems III, Springer LNCS 1066, pp. 208--219, 1996.
- Favela, A., Alla, H., Flaus, J.M., “Modeling and analysis of time invariant linear hybrid systems”, IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, 1998.
- Favela, A. “Hybrid Automata Models in Continuous-Linear Hybrid Systems Analysis”, Proceedings of the 1999 IEEE International Symposium on Intelligent Control/Intelligent Systems and Semiotics, Cambridge, MA., pp. 11-16, 1999.
- Fourlas, G.K., Kyriakopoulos, K.J. and Vournas, C.D. “Hybrid Systems Modeling for Power Systems”. IEEE Circuits And Systems Magazine, pp. 16-23. 2004.
- Henzinger, T.A. and Ho, P-H. “HYTECH: The Cornell hybrid technology tool”. Antsaklis *et al.* (1995). pp. 265-293, 1995.
- Henzinger, T.A., Ho, P-H. and Wong-Toi, H. “Algorithmic analysis of nonlinear hybrid systems”. Transactions on Automatic Control, Special Issue on Hybrid Systems, 1998.
- Inihov, D., Kolesov, Y.B., Senichenkov, Y. “Model Vision Studium Standard version 3.0.17”, *Experimental Object Technologies (XJ)*, St.-Petersburg State Technical University, 1997.
- Morari, M. “Hybrid systems: theory, computation and applications”. International Conference on Control and Automation, 2005. ICCA '05. Volumen 1.
- Nerode, A. and Kohn, W. “Models for hybrid systems: Automata, topologies, stability”. In R.L. Grossman, A. Nerode, A.P. Rezn, and H. Rischel, editors, Hybrid Systems I, volume Lecture Notes in Computer Science 736,, pp. 317-356, Springer-Verlag, 1993.
- Puri, A. and Varaiya, P. “Verification of hybrid systems using abstractions”. In Hybrid Systems Workshop, number 818 in Lecture Notes in Computer Science. Springer-Verlag, pp. 359-369, 1994.
- Tavernini, L. “Differential automata and their discrete simulators”. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 11(6), pp. 665-683, 1987.
- Taylor, J.H. and Kebede, D. “Modeling and simulation of hybrid systems in MATLAB”. IFAC 13th Triennial World Congress. Volumen J. San Francisco, CA. Pp. 275-280, 1996.

Este documento se debe citar como:

Cruz Jiménez B. J. (2006). **Modelación y análisis de un sistema híbrido: Un caso de estudio con un sistema de tanques**. Ingeniería, Revista Académica de la FI-UADY, 10-2, pp.5-15, ISSN: 1665-529X