

Lagrangiano de un elemento finito plano elástico dinámico con ocho grados de libertad

Hossne, A. G.¹

Recibido: 3 de junio de 2006 – Aceptado: 16 de abril de 2007

RESUMEN

Se definió un elemento finito de sección constante, con cualquier orientación en el plano, y sus extremos o nodos lo ligan al resto de los elementos a través de sus conexiones semirrígidas o rígidas. La energía cinética (T) y potencial (V) de un elemento elástico dinámico son la base en la implementación del Principio de Hamilton para la definición de la ecuación de movimiento de un elemento finito elástico dinámico. La definición de la energía cinética y potencial es el primer paso para la formulación variacional preliminar para establecer elementos finitos que se utilizan para resolver, dígame, los problemas de mecanismos que se mueven en el plano utilizando la Ecuación de Hamilton. El objetivo general fue definir el lagrangiano (T – V) de un elemento plano elástico dinámico con ocho grados de libertad, cuatro en cada nodo, que representan las deformaciones: axial ($u(x)$), transversal ($w(x)$), pendiente ($(dw(x)/dx)$) y curvatura ($(d^2w(x)/dx^2)$). Los objetivos específicos consistieron en definir la energía cinética y potencial de un elemento finito elástico a partir de: (a) Un polinomio de primer grado para la deformación axial y (b) Un polinomio de quinto grado para las deformaciones transversal, pendiente y curvatura. Los resultados fueron: (a) La ecuación de la energía cinética, (b) La ecuación de la energía potencial y (c) El vector posicional para la determinación de los límites de integración y longitud del elemento deformado.

Palabras claves: Principio de Hamilton, elemento finito plano elástico dinámico, mecanismos elásticos de cuatro barras, matriz de masas, y matriz de rigideces.

Lagrangian of a planar elastodynamic finite element with eight degrees of freedom

ABSTRACT

A constant section finite element was defined with any orientation in the plane with its ends or nodes tied to the rest of the elements through semi rigid or rigid connections. The kinetic energy (T) and potential energy (V) of an elastodynamic element are the basis of the implementation of Hamilton's Principle to define the equation of motion of an elastodynamic finite element. The definitions of the kinetic and potential energy are the first step for the preliminary variational formulation of finite elements that are used to solve, e.g., problems of mechanisms that move in the plane using Hamilton's Equation. The overall objective of this paper was to define the lagrangian (T-V) of a planar elastodynamic element with eight degrees of freedom, four in each node that represented the deformations: axial ($u(x)$), traverse ($w(x)$), slope ($(dw(x)/dx)$) and curvature ($(d^2w(x)/dx^2)$). The specific objectives consisted on defining the kinetic and potential energies of an elastic finite element starting from: (a) a first degree polynomial for the axial deformation and (b) A fifth degree polynomial for the traverse, slope and curvature deformations. The results were: (a) The kinetic energy equation (b) The potential energy equation and (c) The positional vector to establish the integration limits, and longitude of the deformed element.

Keywords: Hamilton's Principle, elastodynamic finite element, elastic mechanisms of four bars, mass matrix and rigidity matrix.

¹Investigador. Universidad de Oriente, Núcleo de Monagas, Maturín, Venezuela. E-mail: americohossne@cantv.net

INTRODUCCIÓN

El análisis y diseño de mecanismos con eslabones elásticos han sido estudiados por variadas metodologías. Entre ellas se encuentra las técnicas de elementos finitos. Gams *et al.* (2004) utilizaron el principio de Hamilton con aplicación de la ecuación de Reissner (Reissner, 1972) para obtener un elemento finito basado en deformaciones para el análisis dinámico de elementos elásticos planos. Midha (1977); Midha *et al.* (1975); Alexander (1974); Oktay (1973); Iman (1973); Erdman (1972); Winfrey (1969); Przemieniecki (1968); Walter *et al.* (1964) utilizaron tanto el método de fuerzas como el método de desplazamiento en la teoría de elementos finito para el análisis de estructuras y para modelar eslabones elásticos. El método por el acercamiento de los parámetros indicadores también ha sido utilizado mostrando ser un método útil (Sadler, 1972). Midha *et al.* (1978) describieron por un acercamiento general la derivación de la ecuación del movimiento de un mecanismo plano a altas velocidades; ellos se basaron en el trabajo de muchos investigadores y el método de elemento finito para desarrollar las matrices de masas y rigideces con la aplicación de la Ecuación de Lagrange en un eslabón elástico con seis grados de libertad, tres por nodos representando la deformación de cada nodo: deformación axial, deformación transversal y rotación; ellos utilizaron un polinomio de primer grado para la deformación axial y uno cúbico para describir la flexión y el desplazamiento transversal.

En la síntesis de mecanismos flexibles, en orden histórico, están los trabajos de Avilés, (2000), Boutaghou y Erdman (1993), Cleghorn *et al.* (1981) e Iman (1973). Cleghorn *et al.* (1981) presentaron una técnica para generar ecuaciones globales de mecanismos con miembros axialmente rígidos, el procedimiento es ilustrado al emplear un mecanismo plano de cuatro barras con un elemento por barra y en el proceso algebraico utilizaron un polinomio de quinto grado para un total de tres grados de libertad por nodo: deformación transversal, pendiente o rotación y curvatura; generándose una matriz de 7X7 al considerar la deformación axial constante. Saggere y Kota (2001) utilizaron en su modelo polinomios de segundo y tercer grado para un elemento cortante para la síntesis de mecanismos con uniones flexibles o de

segmentos flexibles relativamente largos aplicados a mecanismos de cuatro barras. En este trabajo se consideraron cuatro grados de libertad por nodo, se desestimaron la deformación por cortante, inercia rotatoria y las fuerzas friccionales. Los objetivos fueron: (a) Presentar una función de forma con ocho grados de libertad conformados por dos polinomios, uno de quinto grado para representar las deformaciones transversales, pendientes y curvaturas y uno de primer grado para la deformación axial, (b) Definir, a partir de las funciones de forma, la energía cinética y potencial de un elemento plano elástico dinámico fundamentales en el desarrollo y aplicación de las ecuaciones de William Hamilton y Luis Lagrange, (c) Obtener el vector posicional para la determinación de los límites de integración, y longitud del elemento deformado y (d) Subrayar, que con la metodología expuesta, se pueden definir modelos con un mayor número de grados de libertad en el plano y espacio.

METODOLOGÍA

El elemento se desarrolló a lo largo de una recta directriz con sección transversal constante. Puede adoptar cualquier orientación en el plano y sus extremos o nodos, lo ligan al resto de los elementos a través de conexiones rígidas, semirrígidas, elásticas o articuladas. Se analiza su comportamiento considerando para cada nodo cuatro grados de libertad. Se admite la posibilidad de que cada nodo experimente un cierto desplazamiento en la dirección de cada uno de los ejes globales y también un cierto giro alrededor de cualquiera de dicho dos ejes. En consecuencia, el elemento se verá sometido a lo largo de su directriz a deformaciones axiales, transversales, pendiente y curvatura.

Se ha observado que muchas de las leyes que rigen el fenómeno natural son producto del principio de un tiempo mínimo de una trayectoria entre dos puntos (Dare, 1969; Kyuichiro, 1968; Lanczos, 1968). Los problemas de este tipo son de la forma general siguiente, una función $\phi(x, y(x), y'(x))$ dada, para encontrar una relación entre y , y la variable independiente x , en donde $y = y(x)$, de tal forma que la integral definida tenga un valor extremo (máximo y mínimo):

$$\psi = \int_{x_1}^{x_2} \phi [x, y(x), y'(x)] dx \quad (1)$$

El Principio de Hamilton por el cálculo variacional (Bel y Doblaré, 2005; Gams *et al.*, 2004; Dare, 1969)

establece que el movimiento actual conectando dos estados conocidos del sistema, a tiempos t_1 y t_2 , es el que minimiza a la integral:

$$\int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = \int_{t_1}^{t_2} (q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t) dt \quad (2)$$

La energía cinética y la potencial de un elemento elástico dinámico finito en los intervalos t_1 y t_2 (para encontrar la ecuación del movimiento del elemento) se presentaron a través de dos funciones polinomiales. Dos polinomios fueron usados con un total de ocho coeficientes desconocidos o un total de ocho grados de libertad o coordenadas generalizadas para los dos nodos del elemento. Un polinomio de quinto grado para representar la deformación transversal (mm), la pendiente o rotación (rad) y la curvatura (rad/mm) y

un polinomio de primer grado para representar la deformación axial (mm).

Estructura Geométrica Matemática del Elemento

En la Figura 1 se muestra la idealización del elemento en el plano para el análisis dinámico de mecanismos. En este trabajo se contempló que el movimiento elástico de los eslabones de un mecanismo no afecta la cinemática del mecanismo. Esta hipótesis fue estudiada por muchos investigadores (Midha *et al.*, 1975; Alexander, *et al.*, 1974; Iman, 1973; Erdman, 1972; Sadler, 1972; Winfrey, 1969).

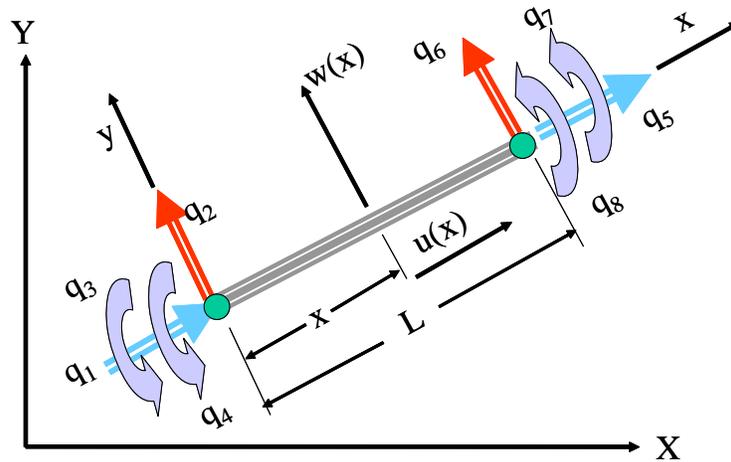


Figura 1. Elemento elástico dinámico con ocho grados de libertad.

Cada miembro de un mecanismo puede ser idealizado por uno o más elementos finitos. Esto en conjunto con la función de forma obtenida permite por lo menos la evaluación de los grados de libertad. Esto es considerado erróneo en modelos con alta frecuencia (Midha *et al.*, 1977). Aunque la idealización de un eslabón como un elemento finito es mucho más simple y reduce el alto proceso computarizado con posibles almacenamientos de errores producto del efecto de redondeo; la idealización multielementos de cada miembro del mecanismo debería ser utilizada para optimizarlos. El método de desplazamiento del elemento finito utiliza los desplazamientos de los nodos como los parámetros desconocidos (Walter y

Rubinstein, 1964; Oktay, 1973; Przemieniecki, 1968). Los grados de libertad de la energía cinética y potencial fueron estudiados con la siguiente representación polinomial:

Modelo para las deformaciones transversales, pendientes y curvaturas:

$$w(x) = A_0 + A_1 * x + A_2 * x^2 + A_3 * x^3 + A_4 * x^4 + A_5 * x^5 \quad (3)$$

En forma matricial

$$w(x) = (0 \ 1 \ x \ x^2 \ 0 \ x^3 \ x^4 \ x^5) \begin{pmatrix} B_0 \\ A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ B_1 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$w(x) = (x)^T (A) \quad (5)$$

El vector (A) de coeficientes polinomiales es sólo función del tiempo.

Modelo para las deformaciones axiales:

$$u(x) = B_0 + B_1 * x \quad (6)$$

$$u(x) = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ x \ 0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} B_0 \\ A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ B_1 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{pmatrix} \quad (7)$$

De la misma forma

$$u(x) = (x)^T (A) \quad (8)$$

Cleghorn *et al.* (1981) utilizaron un polinomio de quinto grado con seis coeficientes para representar las deformaciones transversales, pendientes y curvaturas en los nodos de un elemento finito elástico-dinámico, y Marciel *et al.* (2004) utilizaron un polinomio de tercer grado con cuatro coeficientes para representar las deformaciones transversales y pendientes nodales de una viga con carga distribuida y variación de la rigidez (EI). Urquiza (1992) en la aplicación de elementos finito a vigas, utilizó un polinomio de primer grado para representar la deformación axial y uno de cuarto grado para la transversal y rotación.

El diferencial del lagrangiano $\delta(T - V) / \delta \dot{q}_i$ sólo depende del propio grado de libertad $(T - V) = F(q_i, \dot{q}_i)$, y cada grado de libertad

actúa independientemente, produciendo así ecuaciones independientes. (Formulación de Lagrange (2005) www.dfmf.uned.es/actividades/asignaturas/mecana/pdf/Lagrange.pdf); Bel y Doblaré (2005).

El vector de deformación (S) con las ocho coordenadas generalizadas (q_i para $i = 1, 8$) se define como:

$$(S)^T = (q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7 \ q_8) \quad (9)$$

Los vectores (A) y (S) se relacionan por las condiciones de frontera:

Para $x = 0 \Rightarrow$

$$q_1 = u(0) = B_0 \quad (10)$$

$$q_2 = w(0) = A_0 \quad (11)$$

$$q_3 = dw(0) / dx = A_1 \quad (12)$$

$$q_4 = d^2w(0) / dx^2 = 2 * A_2 \quad (13)$$

Para $x = L \Rightarrow$

$$q_5 = u(L) = B_0 + B_1 * L \quad (14)$$

$$q_6 = w(L) = A_0 + A_1 * L + A_2 * L^2 + A_3 * L^3 + A_4 * L^4 + A_5 * L^5 \quad (15)$$

$$q_7 = dw(L) / dx = A_1 + 2A_2 * L + 3A_3 * L^2 + 4A_4 * L^3 + 5A_5 * L^4 \quad (16)$$

$$q_8 = d^2 w(L) / dx^2 = 2A_2 + 6A_3 * L + 12A_4 * L^2 + 20A_5 * L^3 \quad (17)$$

Estas condiciones expresadas en forma matricial generan la matriz de frontera [C] de las funciones de forma:

$$(S) = [C] (A) \quad (18)$$

Desplazamiento en el Plano de un Elemento Elástico

La Figura 2 muestra esquemáticamente la deformación de un elemento diferencial sin deformación Q como el elemento \vec{Q} deformado, puede ser representada por el vector \vec{r} en coordenadas locales y como \vec{R} en coordenadas globales. Deformaciones tales como deformaciones axiales, transversales, pendiente y curvatura caracterizan la deformación de un elemento en su movimiento en el plano (Oden y Ripperger, 1981; Burton, 1979; Shigley, 1977).

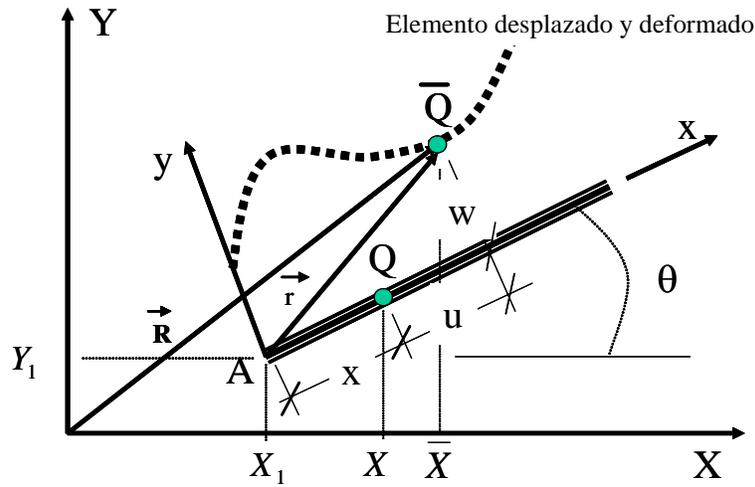


Figura 2. Elemento deformado y desplazado.

$$\vec{r} = (\vec{i} \quad \vec{j}) \begin{pmatrix} x + u(x) \\ w(x) \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x + u(x) \\ w(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\Rightarrow \vec{R} = (\vec{i} \quad \vec{j}) \begin{pmatrix} x * \cos\theta + u(x) * \cos\theta - w(x) * \sin\theta + X_1 \\ x * \sin\theta + u(x) * \sin\theta + w(x) * \cos\theta + Y_1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

La velocidad del elemento elástico se obtiene diferenciando el vector desplazamiento y rotándolo \vec{R}

$$\dot{\vec{R}} = \begin{pmatrix} \dot{u}(x) - w(x) \dot{\theta} + \dot{X}_1 \cos\theta + \dot{Y}_1 \sin\theta \\ x \dot{\theta} + u(x) \dot{\theta} + \dot{w}(x) - \dot{X}_1 \sin\theta + \dot{Y}_1 \cos\theta \end{pmatrix} \quad (22)$$

Si se introduce:

$$\dot{x}_1 = \dot{X}_1 \cos\theta + \dot{Y}_1 \sin\theta \quad (23)$$

$$\dot{y}_1 = -\dot{X}_1 \sin\theta + \dot{Y}_1 \cos\theta \quad (24)$$

$$\dot{\vec{R}} = (\vec{i} \quad \vec{j}) \begin{pmatrix} \dot{x}_1 + \dot{u}(x) - w(x) \dot{\theta} \\ \dot{y}_1 + x \dot{\theta} + u(x) \dot{\theta} + \dot{w}(x) \end{pmatrix} \quad (25)$$

Con el vector velocidad del elemento elástico, $\dot{\vec{R}}$, la energía cinética T de un elemento elastodinámico de masa m, se obtuvo con la expresión:

$$T = \frac{m}{2} \int_0^L \left| \dot{\vec{R}} \right|^2 dx \quad (26)$$

La energía potencial de un elemento elástico se debe a su deformación ($V_1(t)$) y la posición gravitacional ($V_2(t)$). Es común considerar la energía potencial producto de la deformación causada por tensiones cortantes y axiales muy pequeña en comparación con la producida por flexión (Oden y Ripperger 1981). En este trabajo se consideraron además las axiales: La Figura 3 muestra esquemáticamente las

deformaciones axiales $q_1(t)$ y $q_5(t)$ en los nodos del elemento producto de las fuerzas $F_1(t)$ y $F_5(t)$, y las deformaciones transversales ($q_2(t)$ y $q_6(t)$), pendiente ($q_3(t)$ y $q_7(t)$) y curvatura ($q_4(t)$ y $q_8(t)$) producto de las respectivas fuerzas $F_2(t)$, $F_3(t)$, $F_4(t)$, $F_6(t)$, $F_7(t)$ y $F_8(t)$. Para determinar a $V_1(t)$ se necesitó conocer la función de forma para deformaciones transversales y axiales.

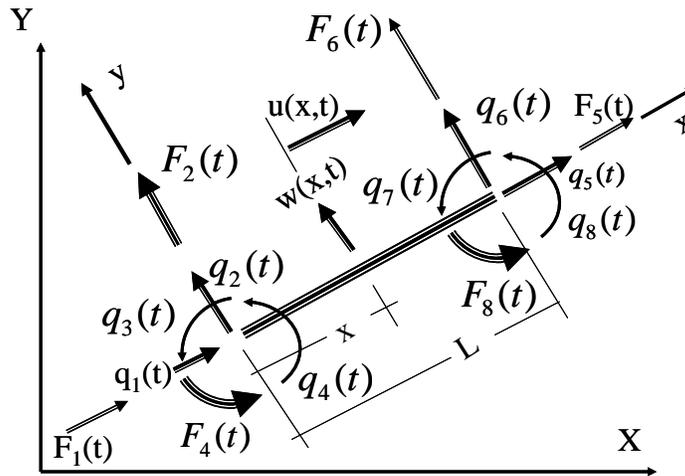


Figura 3. Representación gráfica de la función de forma para la deformación axiales, transversales, curvatura y rotación.

La energía potencial debido al efecto elástico o energía de deformación está dada (Oden y Ripperger 1981):

$$V_1(t) = \frac{EA}{2} \int_0^L \left(\frac{\delta u(x,t)}{\delta x} \right)^2 dx + \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{\delta^2 w(x,t)}{\delta^2 x} \right)^2 dx \quad (27)$$

En donde E es el módulo de elasticidad, A la sección de área e I el momento de inercia del elemento. El desplazamiento axial en cualquier punto x del elemento se puede expresar como:

$$u(x,t) = \phi_1(x) * q_1(t) + \phi_5(x) * q_5(t) \quad (28)$$

Partiendo de la Ecuación 28 y las condiciones de bordes para $x = 0$ y $x = L$:

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad \phi_5(x) = \frac{x}{L} \quad (29)$$

⇒

$$u(x,t) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) * q_1(t) + \frac{x}{L} q_5(t) \quad (30)$$

Al introducir estos resultados en el primer término de la Ecuación 27 se obtuvo:

$$\frac{E^* A}{2} \int_0^L \left(\frac{\delta u(x,t)}{\delta x} \right)^2 dx = \frac{E^* A}{2L} \int_0^L \left(-\frac{q_1(t)}{L} + \frac{q_5(t)}{L} \right)^2 dx, \quad \text{integrando:} \quad (31)$$

$$\frac{E^* A}{2} \int_0^L \left(\frac{\delta u(x,t)}{\delta x} \right)^2 dx = \frac{E^* A}{2L} (q_1^2(t) - 2q_1(t) * q_5(t) + q_5^2(t)) \quad (32)$$

Para la deformación transversal, tangencial y curvatura el desplazamiento en cualquier punto del elemento está dado por:

$$w(x,t) = \phi_2(x)q_2(t) + \phi_3(x)q_3(t) + \phi_4(x)q_4(t) + \phi_6(x)q_6(t) + \phi_7(x)q_7(t) + \phi_8(x)q_8(t) \quad (33)$$

$\phi_i(x)$ para $i=2,3,4,6,7,8$ son las funciones de forma que deben satisfacer las condiciones de bordes, vea la Figura 3. Se introdujeron las condiciones de bordes

en la Ecuación 3 y Ecuación 6, y al resolver el sistema de 6 ecuaciones con seis incógnitas, se obtuvo:

$$\begin{aligned} \phi_2 &= 1 - \frac{10x^3}{L^3} + \frac{15x^4}{L^4} - \frac{6x^5}{L^5} & \phi_3 &= x - \frac{6x^3}{L^2} + \frac{8x^4}{L^3} - \frac{3x^5}{L^4} \\ \phi_4 &= \frac{x^2}{2} - \frac{3x^3}{2L} + \frac{3x^4}{2L^2} - \frac{x^5}{2L^3} & \phi_6 &= \frac{10x^3}{L^3} - \frac{15x^4}{L^4} + \frac{6x^5}{L^5} \\ \phi_7 &= -\frac{4x^3}{L^2} + \frac{7x^4}{L^3} - \frac{3x^5}{L^4} & \phi_8 &= \frac{x^3}{2L} - \frac{x^4}{L^2} - \frac{x^5}{2L^3} \end{aligned} \quad (34)$$

Estas ecuaciones son introducidas en el segundo término de la derecha de la Ecuación 27, se realiza la integración:

$$\frac{EI}{2} \int \left(\frac{\delta^2 w(x,t)}{\delta^2 x} \right)^2 dx = \frac{EI}{2} \left(D_0 L + \frac{D_1 L^2}{2} + \frac{D_2 L^3}{3} + \frac{D_3 L^4}{4} + \frac{D_4 L^5}{5} + \frac{D_5 L^6}{6} + \frac{D_6 L^7}{7} \right) \quad (35)$$

Los D_i para $i=0, 6$ representan los coeficientes del producto de dos polinomios que forman parte de $dw(x,t)/dx$ y $d^2w(x,t)/dx^2$ en función de q_i y L

(Hossne, 1981); y la energía potencial debido a la posición gravitacional $V_2(t)$ (Oden y Ripperger, 1981):

$$V_2(t) = \frac{mg}{2} (2Y_1 + L * SEN\theta) \quad (36)$$

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Energía Cinética de un Elemento Elástico

De la Ecuación 18 se obtuvo el vector de coeficientes (A):

$$(A) = [C]^{-1}(S) \quad (37)$$

$$[C]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/L & 0 & 0 & 0 & 1/L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10/L^3 & -6/L^2 & -3/2L & 0 & 10/L^3 & -4/L^2 & 1/2L \\ 0 & 15/L^4 & 8/L^3 & 3/2L^2 & 0 & -15/L^4 & 7/L^3 & -1/L^2 \\ 0 & -6/L^5 & -3/L^4 & -1/2L^3 & 0 & 6/L^5 & -3/L^5 & 1/2L^3 \end{bmatrix} \quad (38)$$

De las ecuaciones (5), (6) y (37):

$$w(x) = (x)^T [C]^{-1} (S) \quad (39)$$

$$u(x) = (x)^T [C]^{-1} (S) \quad (40)$$

$$\dot{w}(x) = (x)^T [C]^{-1} (\dot{S}) \quad (41)$$

$$\dot{u}(x) = (x)^T [C]^{-1} (\dot{S}) \quad (42)$$

La energía cinética del elemento diferencial se obtuvo de la ecuación siguiente (Oden y Ripperger, 1981; Shigley, 1977; Dare, 1967): donde la energía cinética rotacional se desestimó, por lo tanto al introducir (25) en (26):

$$T = \frac{m}{2} \int_0^L \left[(\dot{x}_1 + \dot{u}(x) - \dot{\theta} w(x))^2 + (\dot{y}_1 + x \dot{\theta} + \dot{\theta} u(x) + \dot{w}(x))^2 \right] dx \quad (43)$$

Elevando al cuadrado, sumando, arreglando e integrando:

$$\begin{aligned} T = & \frac{m}{2} \left[L \dot{x}_1^2 + L \dot{y}_1^2 + L^2 \dot{y}_1 \dot{\theta} + \frac{L^3 \dot{\theta}^2}{3} + 2 \dot{x}_1 (E)^T (\dot{S}) + (\dot{S}) [B] (\dot{S}) - 2 \dot{\theta} (\dot{S})^T [A] (S) \right. \\ & - \dot{x}_1 \dot{\theta} (G)^T (S) + \dot{\theta}^2 (S)^T [M] (S) + 2 \dot{y}_1 \dot{\theta} (E)^T (S) + 2 \dot{y}_1 (G)^T (\dot{S}) + 2 \dot{\theta}^2 (N)^T (S) + \\ & \left. 2 \dot{\theta} (L)^T (\dot{S}) + \dot{\theta}^2 (S)^T [B] (S) + 2 \dot{\theta} (S)^T [A] (\dot{S}) + (\dot{S})^T [M] (\dot{S}) \right] \quad (44) \end{aligned}$$

Los vectores (E)^T, (G)^T, (N)^T y (L)^T, las matrices [B], [A] y la matriz de masas [M] de la energía cinética (Ecuación 51) son todos en función de la matriz [C]⁻¹ al realizarse las respectivas integraciones:

$$(E) = (L/2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad L/2 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \quad (45)$$

$$[B] = \int_0^L [\bar{B}] dx = m \begin{bmatrix} L/3 & 0 & 0 & 0 & L/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L/6 & 0 & 0 & 0 & L/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$(G)^T = \int_0^L (\bar{G})^T dx = \begin{pmatrix} 0 & L/2 & L^2/10 & L^3/120 & 0 & L/2 & -L^2/10 & L^3/120 \end{pmatrix} \quad (47)$$

$$(N) = \int_0^L x(\bar{E}) dx = \int_0^L ((x - x^2/L) 0 \ 0 \ 0 \ x^2/L \ 0 \ 0 \ 0) dx \quad (48)$$

$$(N)^T = \begin{pmatrix} L^2/6 & 0 & 0 & 0 & L^2/3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[A] = \int_0^L [\bar{A}] dx = \begin{bmatrix} 0 & 5L/14 & 13L^2/210 & L^3/210 & 0 & L/7 & -4L^2/105 & L^3/280 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L/7 & 4L^2/280 & L^3/280 & 0 & 5L/14 & -13L^2/210 & L^3/210 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$(L)^T = \begin{pmatrix} 0 & L^2/7 & 4L^3/105 & L^4/280 & 0 & 5L^2/14 & -13L^3/210 & L^4/210 \end{pmatrix} \quad (50)$$

$$m^* \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 181L/462 & 311L^2/4620 & 281L^3/55440 & 0 & 25L/231 & -151L^2/4620 & 181L^3/55440 \\ 0 & 311L^2/4620 & 52L^3/3465 & 23L^4/18480 & 0 & 151L^2/4620 & -19L^3/1980 & 13L^4/13860 \\ 0 & 281L^3/55440 & 23L^4/18480 & L^5/9240 & 0 & 181L^3/55440 & -13L^4/13860 & L^5/11088 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25L/231 & 151L^2/4620 & 181L^3/55440 & 0 & 181L/462 & -311L^2/4620 & 281L^3/55440 \\ 0 & -151L^2/4620 & -19L^3/1980 & -13L^4/13860 & 0 & -311L^2/4620 & 52L^3/3465 & -23L^4/18480 \\ 0 & 181L^3/55440 & 13L^4/13860 & L^5/11088 & 0 & 281L^3/55440 & -23L^4/18480 & L^5/9240 \end{pmatrix} \quad (51)$$

Clerghorn *et al.* (1981) produjeron, con el uso de un polinomio de quinto grado, una matriz de masa de 7X7 en donde se consideró la deformación axial del elemento constante. Los parámetros de la matriz

producidos por ellos, son iguales a los calculados en este trabajo. Todos menos los correspondientes a la deformación axial.

$$V(t) = \frac{EA}{2L}(q_1^2(t) - 2q_1(t) * q_5(t) + q_5^2(t)) + \frac{EI}{2}(D_0L + \frac{D_1L^2}{2} + \frac{D_2L^3}{3} + \frac{D_3L^4}{4} + \frac{D_4L^5}{5} + \frac{D_5L^6}{6} + \frac{D_6L^7}{7}) + \frac{m * g}{2}(2Y_1 + L * SEN\theta) \quad (52)$$

La Ecuación 52 tiene que ser expresada en función del vector desplazamiento (S). Esto se puede hacer con aplicación de la expansión de Taylor, ignorando términos de tercer orden o mayores, por lo tanto:

$$V(t) = (S)^T \frac{1}{2}[K_1](S) + (S)^T \frac{1}{2}[K_2](S) + \frac{m * g}{2}(2Y_1 + L * SEN\theta) \quad (53)$$

Para la matriz de rigideces [K] igual a:

$$\frac{1}{2}[K] = \frac{1}{2}[K_1] + \frac{1}{2}[K_2] \quad (54)$$

$$\Rightarrow V(t) = (S)^T \frac{1}{2}[K](S) + \frac{m * g}{2}(2Y_1 + L * SEN\theta) \quad (55)$$

La matriz de rigideces [K] viene expresada como:

$$\begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120EI/7L^3 & 60EI/7L^2 & 3EI/7L & 0 & -120EI/7L^3 & 60EI/7L^2 & -3EI/7L \\ 0 & 60EI/7L^2 & 192EI/35L & 11EI/35 & 0 & -60EI/7L^2 & 108EI/35L & -4EI/35 \\ 0 & 3EI/7L & 11EI/35 & 3EIL/35 & 0 & -3EI/7L & 4EI/35 & EIL/70 \\ -EA/L & 0 & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -120EI/7L^3 & -60EI/7L^2 & -3EI/7L & 0 & 120EI/7L^3 & -60EI/7L^2 & 3EI/7L \\ 0 & 60EI/7L^2 & 108EI/35L & 4EI/35 & 0 & -60EI/7L^2 & 192EI/35L & -11EI/35 \\ 0 & -3EI/7L & -4EI/35 & EIL/70 & 0 & 3EI/7L & -11EI/35 & 3EIL/35 \end{bmatrix} \quad (56)$$

Se tiene a T(t) y V(t), y así el lagrangiano por lo tanto se podría aplicar el Principio de Hamilton con el uso de la Ecuación 2. Cleghorn *et al.* (1981) obtuvieron matrices y vectores con siete grados de libertad excluyendo la variabilidad de la deformación axial. Su modelo utilizó una función de forma basada en sólo un polinomio de quinto grado. Sus resultados para las deformaciones transversales, pendiente y curvatura fueron idénticos. En este trabajo se utilizaron dos polinomios, uno para las deformaciones transversales y el otro para la deformación axial; por lo tanto, se consideró la variabilidad de ésta para un elemento elástico dinámico. Hossne (2002) encontró experimentalmente que las deformaciones axiales fueron mayores que las transversales en algunas

posiciones en el movimiento de un mecanismo de cuatro barras.

CONCLUSIONES

1. Por vía geométrica y algebraica se definió la energía cinética y potencial de un elemento finito plano elástico dinámico que podrían ser implementadas en el Principio de Hamilton con el objetivo de definir una ecuación para movimiento de un elemento finito plano elástico dinámico. El método analítico geométrico introducido mostró versatilidad para definir la lagrangiana de elementos elásticos dinámicos con ocho grados de libertad.

2. Se podrían definir funciones algebraicas con un mayor número de grados de libertad que incluyan por ejemplo inercia rotatoria en los nodos y deformación por cortante. Esto requeriría mayor precisión en los procesos computarizados para evitar almacenamiento de errores. Al menos con el uso de técnicas para evitar tales resultados alterados, sean matemáticamente o con el uso de ordenadores electrónicos más precisos.
3. El vector \vec{R} puede ser utilizado para determinar los límites de integración para encontrar la longitud y forma del elemento deformado y además para determinar la nueva posición de los nodos en movimiento por ejemplo de un mecanismo en cualquier instante de tiempo.
4. Los métodos algebraicos son exigentes en los desarrollos matemáticos con la posibilidad de incluir errores. Una alternativa sería el uso de programas desarrolladores de procesos analíticos algebraicos que ya existen en el mercado. Con la metodología utilizada se podrían definir modelos con un mayor número de grados de libertad, representando así otras deformaciones y con la posibilidad de definir un elemento espacial para el análisis de mecanismos en tres dimensiones.

AGRADECIMIENTOS

El autor desea expresar su agradecimiento al Consejo de Investigación de la Universidad de Oriente por el financiamiento de esta investigación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alexander, R. M. and Lawrence, K. L. (1974). An experimental investigation of the dynamic response of an elastic mechanism. *J Engng Industry, Trans. ASME*, vol. 96, No.1

Avilés, R., Ajuria, G., Gómez-Garay, V. and Navalpotro, S. (2000). Comparison among nonlinear optimization methods for the static equilibrium analysis of multibody systems with rigid and elastic elements. *Mechanisms and Machine Theory*, vol. 35, No. 8, pp. 1151-1168.

Bel, D. y Doblaré, M. (2005). Formulación de Elementos finitos Lagrangianos y Hamiltonianos Bond-Graph para la Simulación Dinámica de sistemas Multidisciplinares. Universidad de Zaragoza. E-mail: mdoblare@posta.unizar.es davidbel@posta.unizar.es. 21 p.

Boutaghou, Z.E. and Erdman, A.G. (1993). A design methodology for system parameters synthesis of elastic planar linkages. *Journal of Mechanical Design*, vol. 114, pp. 536-546.

Burton, P. (1979). *Kinematics and Dynamics of Planar Machinery*. Prentice-Hall. 670 p.

Cleghorn, W. L., Fenton, R. G., and Tabarrock, B. (1981). Optimum design of high speed flexible mechanisms. *Mechanisms and Machine Theory*, vol. 16, n° 4, pp. 394- 406.

Dare, A. W. (1967). *Theory and Problems of Lagrangian Dynamics, with a treatment of Euler's Equations of Motion, Hamilton's Equation and Hamilton's Principle*. Schaum's Outline Series. McGraw-Hill book Company. 353 p.

Erdman, A. G. (1972). A general method for kineto-elastodynamic analysis and synthesis of mechanisms. Doctoral Dissertation, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York.

Gams, M., Saje, M., Srpeie, I and Planinc, I. (2004). Strain-base finite element for the dynamic analysis of elastic planar beams. University of Ljubljana, Faculty of Civil and Geodetic Engineering, SI-1115 Ljubljana, Jamova 2, Slovenia. 4 p. Email arw-bled2004.scix.net/Files/acceptedpapers/Accepted/Gams.pdf.

Hossne, A. (1981). Rigid and Kineto-Elastic Dynamic Study of Mechanisms. Ph.D. Thesis. Oklahoma State University. 248 p.

Hossne, A. (2002). Síntesis, análisis dinámico, diseño y evaluación de un modelo experimental de un mecanismo en línea de cuatro barras manivela basculador. *Saber*, Universidad de Oriente, Venezuela. Vol. 14 N° 2: 149-154.

Iman, I. (1973). A general method for kineto-elastodynamic analysis and design of high speed mechanisms. Doctoral Dissertation, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York.

Kyuichiro, Washizu. (1968). Variational Method in Elasticity and Plasticity. Oxford: Pergamon Press. 325 p.

Lanczos, C. (1968). The Variational Method in Elasticity and Plasticity. Oxford: Pergamon Press. 280 p.

Marciel, M. C., Pilotta, E. A. y Sottosauto, G. N. (2004). Aplicación de un modelo de optimización al diseño de una viga elástica. Mecánica Computacional Vol. XXIII, pp. 2831-2844.

Midha, A., Erdman, A. G., Sandor, G. N. and Frohrib, A. G. (1975). An alternate computationally efficient and conservative method for kineto-elastodynamic analysis of mechanisms. Proc. 4th OSU appl. Mech. Conf. Chicago, Illinois.

Midha, A. (1977). Dynamics of high speed linkages with elastic members. Doctoral Dissertation. University of Minnesota, Minneapolis, Minnesota.

Midha, A., Badlani, L. B. and Erdman, A. G. (1977). A note on the effects of multi-element idealization of planar-elastic-linkage members. Proc. 5th OSU appl. Mech. Conf. Oklahoma City, Oklahoma.

Midha, A., Erdman, A. G. and Frohrib, D. A. (1978). Finite element approach to mathematical modeling of high-speed elastic linkages. Mechanism and Machine Theory. Vol 13: 603-618.

Oden, J. T. and Ripperger, E. A. (1981). Mechanics of Elastic Structures. Second Edition. McGraw-Hill Book Company. 460 p.

Oktay, U. (1973). Finite element Method-Basic Concepts and Applications. Intext New York.

Przemieniecki, J. s. (1968). Theory of Matrix Structural Analysis. McGraw-Hill, New York.

Reissner, E. (1972). On one-dimensional finite-strain beam theory: The plane problem, Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP) 23, 795-804.

Sadler, J. P. (1972). A lumped parameter approach to kineto-elastodynamic analysis of mechanisms. Doctoral Dissertation, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York.

Saggere, L. and Kota, S. (2001). Synthesis of Planar, compliant Four-Bar Mechanisms for Compliant-Segment Motion Generation. Journal of Mechanical Design. ASME. Vol. 123, 535-541.

Shigley, J. E. (1977). Mechanical Engineering Design. Third Edition. McGraw-Hill. 695 p.

Walter, C. H. and Moshe, f. R. (1964). Dynamics of Structures. Prentice-Hal, Englewood cliffs, New Jersey.

Urquizo, C. R. A. (1992). Análisis por elementos finitos: Elaboración de un manual instructivo para el programa Cosmos/M v1.6. Escuela Superior Politécnica del Litoral, Facultad de Ingeniería en Mecánica, Guayaquil, Ecuador. 515.62 U79 C2. 287 p.

Winfrey, R. C. (1969). Dynamics of mechanisms with elastic links. Doctor Dissertation, UCLA.

Este documento se debe citar como:

Hossne, A. G. (2007). **Lagrangiano de un elemento finito plano elástico dinámico con ocho grados de libertad**. Ingeniería, Revista Académica de la FI-UADY, 11-1, pp.25-36, ISSN: 1665-529X.