

Desarrollo de un método para la solución de sistemas de tuberías abiertas

José A. Gamboa Vargas¹, Jorge García Sosa², Roger I. Méndez Novelo³.

RESUMEN

Se desarrolla un método para la solución de redes abiertas de tuberías y se compara con el método tradicional. En el primer método se aplica la ecuación de la energía considerando todas las componentes de la energía total, en contraste con el método tradicional que en la formulación inicial omite la carga de velocidad de las descargas libres.

Se compararon ambos métodos mediante la resolución de un problema red abierta unitaria y se comprobó que el método propuesto resulta más sencillo y conceptualmente completo. El método propuesto facilita la aplicación de sistemas algebraicos computacionales, como el Mathcad.

Palabras clave: Redes de tuberías, ecuación de la energía, Mathcad

Introducción

Las redes abiertas son sistemas de tuberías que se interconectan unas con otras sin llegar a formar circuitos. Están constituidas por extremos, nudos y tramos (Figura 1).

Los extremos de las redes abiertas pueden ser tanques abiertos, descargas a la atmósfera o nudos. En los tanques abiertos, generalmente denotados con letras mayúsculas (A, B y C de la Figura 1), la energía total para puntos ubicados en la superficie libre del fluido es igual a la energía potencial (z), es decir, las cargas de energía cinética ($v^2/2g$) y de presión (p/γ) son iguales a cero; en las descargas a la atmósfera (extremo E de la Figura 1), la energía total es la suma de la energía potencial y carga de velocidad. Los extremos del tipo nudo (D y F de la Figura 1), indican que el sistema de tuberías se sigue ramificando, pero que para el análisis sólo se considerará hasta el propio nudo; en este caso la energía total se calcula sumando la energía potencial, la energía cinética y la carga de presión.

Los nudos internos, denotados con letras minúsculas (i e j en la Figura 1), son los puntos conectores de 3 ó más tramos de tubería (denotados por números en la Figura 1).

En una red abierta, se debe cumplir la ecuación de la energía aplicada entre los extremos, así como la ecuación de continuidad en los nudos internos. En estas últimas, se adopta un signo a los gastos que entran al nudo y signo contrario a los que salen de él, para que se cumpla que la suma de los gastos sea igual a 0.

Un problema clásico en la teoría de redes abiertas lo representa la red abierta unitaria, la cual consta de un solo nudo interno y 3 o más extremos que pueden ser tanques, nudos externos o descargas. La resolución de este tipo de problema tiene importantes aplicaciones en la agronomía, sistemas de riego, sistemas de agua potable, instalaciones en edificios etc.

¹ *Profesor Investigador del Cuerpo Académico de Hidráulica e Hidrología de la FIUADY.*

² *Profesor de Carrera del Cuerpo Académico de Hidráulica e Hidrología de la FIUADY.*

³ *Profesor de Carrera del Cuerpo Académico de Ingeniería Ambiental de la FIUADY.*

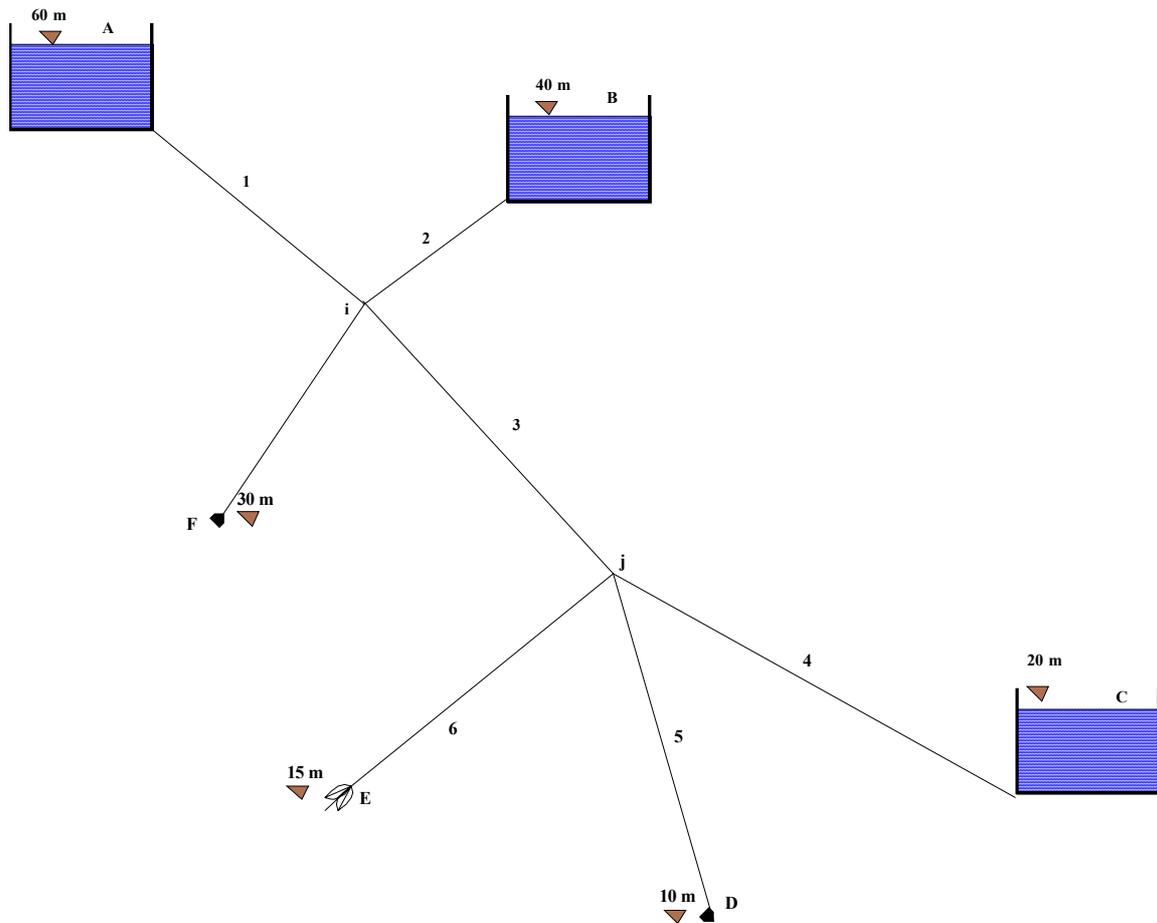


Figura 1. Red abierta de tuberías

Considerando el caso de una red abierta unitaria con dos depósitos que se unen en un nudo y con una derivación hacia una tubería en descarga libre (Figura 2), un procedimiento de solución (Sotelo, 1999) utiliza la ecuación de continuidad para establecer la condición de flujos de entrada y salida en el nudo y la ecuación de la energía para indicar la relación existente entre los depósitos y dicho nudo, así como entre el nudo y la descarga libre; sin embargo, con objeto de reducir el número de incógnitas se considera despreciable la velocidad en la descarga libre (carga de velocidad), de tal manera que de ambas ecuaciones resulta una ecuación de segundo grado, en donde la incógnita principal corresponde a la pérdida por fricción entre un depósito y el nudo. Una vez obtenido un primer valor de la pérdida por fricción, se procede a la obtención de la velocidad en la descarga libre y se resuelve

nuevamente el sistema, por lo que se logra una aproximación adecuada a la solución.

En el procedimiento anterior se incurre en un error conceptual al despreciar velocidad en la descarga libre, en aras de obtener una solución matemática menos compleja. En el presente trabajo se desarrolla un procedimiento de solución del problema en el que se incluyen todas las componentes de la energía total involucradas en la red, que hace que el planteamiento de solución sea completo y lógico sin que se dificulte su resolución.

METODOLOGÍA

El procedimiento utilizado por los autores para la solución de sistemas de este tipo, aplica la ecuación de la energía entre el nudo y cada uno de los

extremos, así como la ecuación de continuidad en el nudo (ecuación de nudo), de tal modo que se genera un sistema de 4 ecuaciones que coincide con el número de incógnitas. Para ejemplificar el procedimiento, obtendremos las ecuaciones para el sistema de tuberías mostrado en la Figura 2, que nos permitirá determinar la magnitud y dirección de los gastos en la red, así como la energía total en el nudo i .

Se considera que se tienen los siguientes datos:

z_1, z_2, z_3 : elevaciones de los extremos de la red de tuberías, medidas a partir del

plano horizontal de referencia (PHR), expresadas en m;

L_1, L_2, L_3 : longitudes de las tuberías del sistema, en m;

D_1, D_2, D_3 : diámetros de las tuberías del sistema, en m;

$f_1 = f_2 = f_3$: factor de fricción para cada tubería; es adimensional y depende la fórmula de fricción elegida.

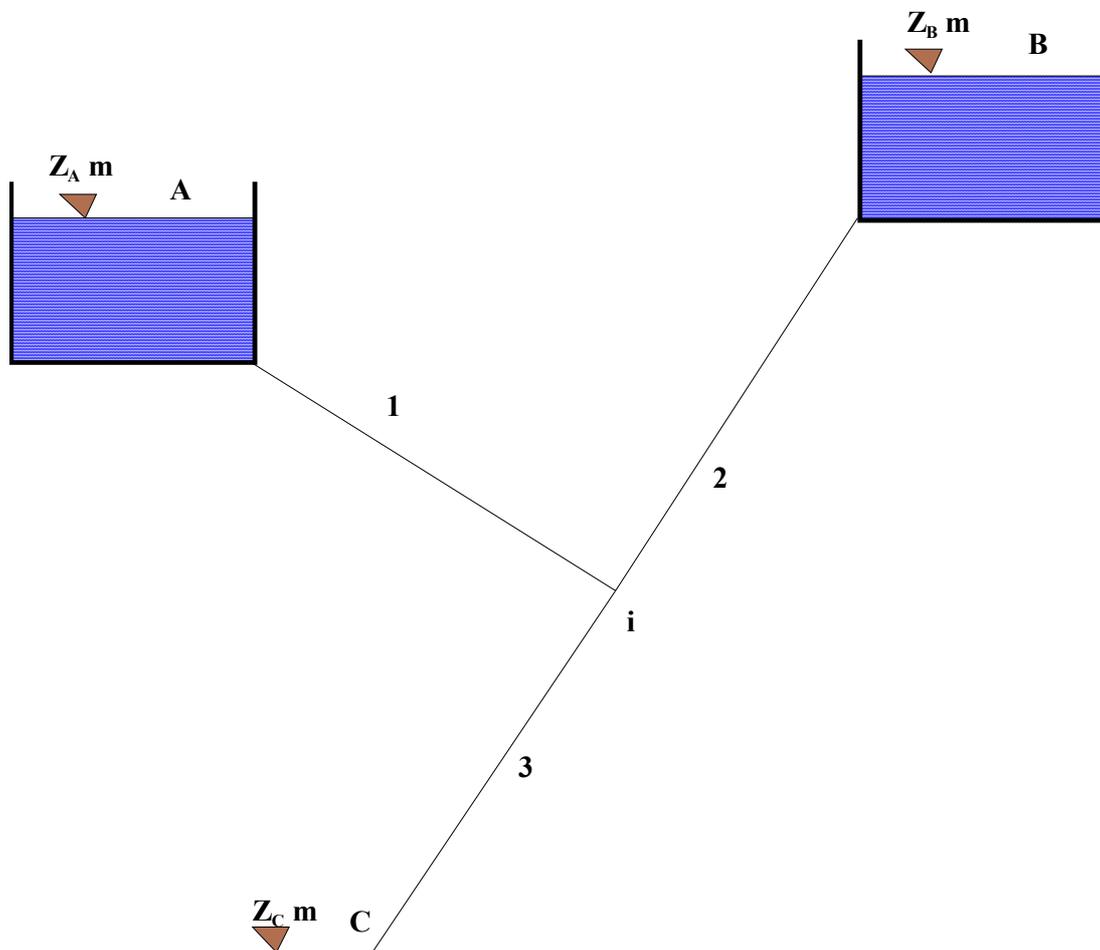


Figura 2. Red abierta unitaria

Suponiendo que los tanques A y B abastecen al nudo i (Figura 2), la ecuación de continuidad (ecuación de nudo) puede expresarse como sigue:

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 \quad [1]$$

Si la solución del sistema de ecuaciones no tiene significado físico, deberá interpretarse que el tanque B abastece al tanque A y al nudo i.

Aplicando la ecuación de la energía entre el extremo A y el nudo i, se tiene que la energía total en el extremo A es igual a la energía total en el nudo i más las pérdidas de energía del extremo A al nudo i; por tanto:

$$Z_A = E_i + h_1$$

Donde:

Z_A : Energía total en el extremo A, en metros.

E_i : Carga de energía en el nudo i, en metros.

h_1 : Pérdida de energía en el tramo 1, en metros.

De la ecuación de Darcy-Weisbach, la pérdida de energía se puede escribir como:

$$h_i = f_i \frac{L_i v_i^2}{D_i 2g}$$

Expresando la ecuación anterior en términos del gasto y considerando que las pérdidas locales son despreciables, se tiene:

$$h_i = \frac{8f_i L_i}{\pi^2 g D_i^5} Q_i^2$$

Si hacemos:

$$K_i = \frac{8f_i L_i}{\pi^2 g D_i^5}$$

en general K_i se da en:

$$\left[\frac{s^2}{m^5} \right]$$

entonces:

$$Z_A = E_i + K_1 Q_1^2 \quad \text{o bien}$$

$$Q_1 = \sqrt{\frac{Z_A - E_i}{K_1}} \quad [2]$$

Generalizando este procedimiento y aplicando la ecuación de la energía entre los extremos y el nudo, se tiene para el extremo B y el nudo i:

$$Z_B = E_i + K_2 Q_2^2$$

o bien

$$Q_2 = \sqrt{\frac{Z_B - E_i}{K_2}} \quad [3]$$

Aplicando nuevamente la ecuación de la energía entre el nudo i y el extremo C:

$$E_i = Z_C + \frac{v_3^2}{2g} + K_3 Q_3^2$$

Donde:

$$\frac{v_3^2}{2g} = \frac{8}{\pi^2 g D_3^4} Q_3^2 = k_3 Q_3^2$$

Por lo que:

$$Q_3 = \sqrt{\frac{E_i - Z_C}{K_3 + k_3}} \quad [4]$$

Resolviendo simultáneamente [1], [2], [3] y [4], obtenemos E_i y con esto los valores de Q_1 , Q_2 y Q_3 .

RESULTADOS

Con objeto de contrastar y evaluar lo expuesto anteriormente, se aplicarán ambos procedimientos a una red abierta de tuberías. Se tiene una red abierta de tuberías, como se muestra en la Figura 3 y se desea determinar la magnitud de los gastos que circulan, así como la dirección de los mismos (Sotelo, 1999).

Consideraremos el plano horizontal de referencia (PHR) a la altura de la descarga libre. Las tuberías son de fierro fundido con 15 años de servicio con las características y datos geométricos siguientes:

Elevaciones:

$$z_1 = 50 \text{ m}, \quad z_2 = 70 \text{ m}, \quad z_3 = 0.0 \text{ m}$$

Longitudes de tuberías:

$$L_1 = 680 \text{ m}, \quad L_2 = 520 \text{ m}, \quad L_3 = 800 \text{ m}$$

Diámetros de tuberías:

$$D_1 = 0.55 \text{ m}, \quad D_2 = 0.60 \text{ m}, \quad D_3 = 0.80 \text{ m}$$

Factores de fricción:

$f_1 = f_2 = f_3$; es adimensional y depende la fórmula de fricción elegida.

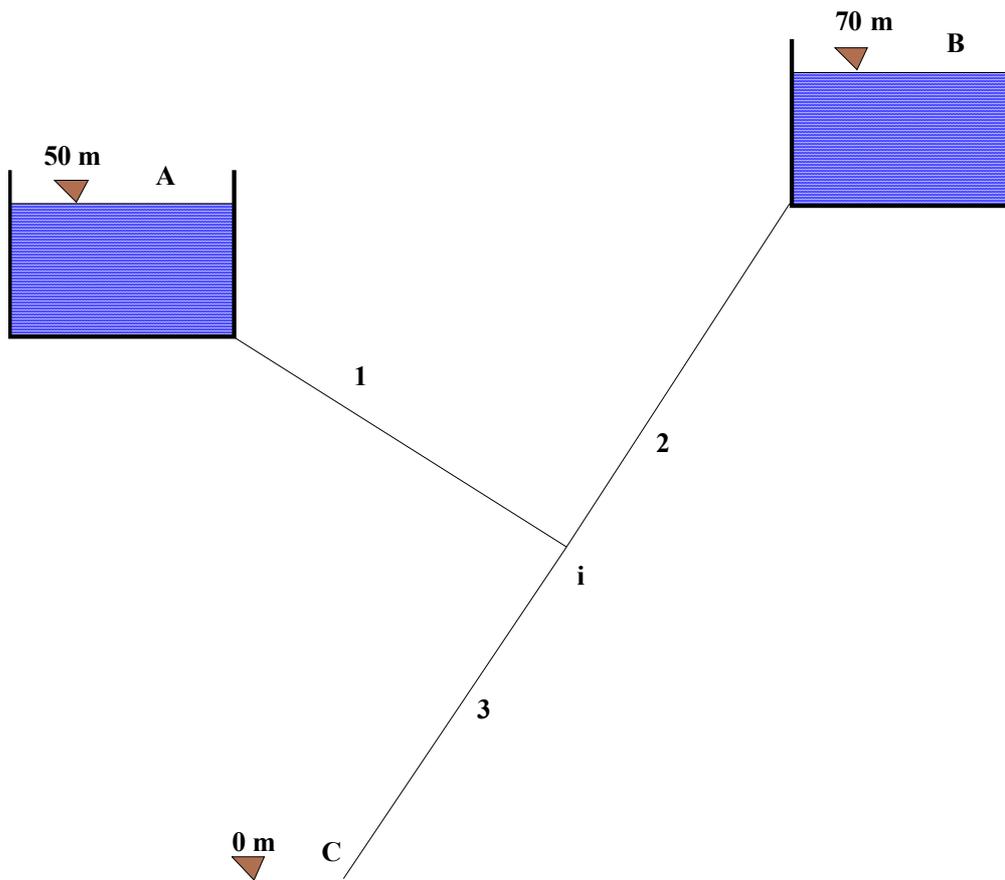


Figura 3. Sistema de tuberías

Como ya se dijo, los tubos son de fierro fundido con 15 años de servicio, por lo que se utiliza la fórmula de Kozeny a fin de considerar los años de servicio de dicha tubería; en este caso, $N = 30$ (Sotelo, 1999).

Procedimiento convencional. Se determinan los gastos con base en el cálculo de la pérdida de energía

(Sotelo, 1999), esto es, la incógnita es la pérdida de energía que inicialmente se calcula sin considerar la velocidad en la descarga libre.

De la aplicación de la ecuación de continuidad para el nudo i, se tiene:

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 \quad [5]$$

Si se define:

h_1 : pérdida de energía en el tramo 1.

$h_1 + \Delta h$: pérdida de energía en el tramo 2.

h_3 : pérdida en el tramo 3; en este procedimiento, se supone que la carga de velocidad es nula, puesto que para una primera aproximación $V_3 = 0$.

Teniendo en cuenta que:

$$h_i = \frac{8f_i L_i}{\pi^2 g D_i^5} Q_i^2 \quad [6]$$

Sabemos de Kozeny:

$$f_i = \frac{2g}{(8.86 \log D_i + N)^2} \quad [7]$$

Al aplicar la ecuación de la energía entre los extremos de la red, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$Q_1 = \frac{\pi}{4} D_1^2 [8.86 \log D_1 + N] \sqrt{\frac{h_1}{L_1} D_1} \quad [8]$$

$$Q_2 = \frac{\pi}{4} D_2^2 [8.86 \log D_2 + N] \sqrt{\frac{h_1 + \Delta h}{L_2} D_2} \quad [9]$$

$$Q_3 = \frac{\pi}{4} D_3^2 [8.86 \log D_3 + N] \sqrt{\frac{h_3}{L_3} D_3} \quad [10]$$

Puede observarse que las ecuaciones [8], [9] y [10] son similares no obstante se trata de diferentes tipos de extremos, lo cual es consecuencia de omitir la carga de velocidades el extremo C.

Del análisis de la geometría de la Figura 3, se puede decir que:

$$\Delta h = 20 \text{ m y } h_3 = 50 - h_1$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado que resulta, se obtienen dos soluciones para la pérdida de carga en el tramo 1 (h_1): $h_{1,1} = 19.81 \text{ m}$ y $h_{1,2} = 46.19 \text{ m}$. Del análisis de los resultados anteriores, solamente tiene significado físico $h_{1,1} = 19.81 \text{ m}$.

De lo anterior, se tiene:

$$Q_1 = 0.834 \text{ m}^3/\text{s}; Q_2 = 1.696 \text{ m}^3/\text{s}; \text{ y } Q_3 = 2.540 \text{ m}^3/\text{s}$$

Con estos valores se estima la carga de velocidad, valor que inicialmente fue despreciado.

$$\frac{v_3^2}{2g} = 1.306 \text{ m}$$

Corrigiendo los valores anteriores, finalmente se obtiene:

$$Q_1 = 0.818 \text{ m}^3/\text{s}; Q_2 = 1.682 \text{ m}^3/\text{s}; \text{ y } Q_3 = 2.517 \text{ m}^3/\text{s}; E_i = 30.19 \text{ m}$$

Procedimiento propuesto. Se aplica la ecuación de la energía entre los extremos de la red (incluyendo todos los componentes de la energía total) y la ecuación de continuidad en el nudo interno obteniéndose un sistema de 4 ecuaciones.

Con la fórmula de Kozeny (Sotelo, 1999) se calculan los coeficientes de fricción f :

$$f_i = \frac{2g}{(8.86 \log D_i + N)^2}$$

$$f_1 = 0.0255; \quad f_2 = 0.0249; \quad f_3 = 0.0231$$

Agrupando los valores constantes de la ecuación de Darcy Wesibach y de la carga de velocidad expresada en términos del gasto, se definen las constantes K_i y k_i :

$$K_i = \frac{8f_i L_i}{\pi^2 g D_i^5} \quad k_i = \frac{8}{\pi^2 g D_i^4}$$

Se obtiene:

$$K_1 = 28.5; K_2 = 13.8; K_3 = 4.7; k_3 = 0.2$$

De la ecuación de continuidad en el nudo i, podemos escribir:

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 \quad [11]$$

Aplicando la ecuación de la energía entre el tanque A y el nudo i:

$$Z_A = E_i + K_1 Q_1^2$$

por lo que

$$50 = E_i + 28.5 Q_1^2 \quad [12]$$

Utilizando la ecuación de la energía entre el tanque B y el nudo i, se obtiene:

$$Z_B = E_i + K_2 Q_2^2$$

por lo que

$$70 = E_i + 13.8 Q_2^2 \quad [13]$$

Finalmente, aplicando la ecuación de la energía entre el nudo i y el extremo C y considerando que $Z_C = 0$, se tiene:

$$E_i = Z_C + k_3 Q_3^2 + K_3 Q_3^2 = (K_3 + k_3) Q_3^2 \quad [14]$$

$$E_i = 4.9 Q_3^2 \quad [15]$$

De modo que con [11], [12], [13] y [15] tenemos un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas que conducen a la siguiente ecuación de segundo grado:

$$E_i^2 - 34.95 E_i + 127.66 = 0 \quad [16]$$

cuyas soluciones algebraicas son:

$$E_{i,1} = 30.81 \text{ m y } E_{i,2} = 4.14 \text{ m.}$$

Puesto que la primera solución de la ecuación de segundo grado tiene significado físico, reemplazando en las ecuaciones [12], [13] y [15], se tiene:

$$Q_1 = 0.821 \text{ m}^3/\text{s}; Q_2 = 1.685 \text{ m}^3/\text{s}; Q_3 = 2.51 \text{ m}^3/\text{s}; \\ E_i = 30.81 \text{ m}$$

Los valores anteriores cumplen con la ecuación de continuidad [11] y se aproxima a la solución obtenida utilizando el procedimiento 1, pero sin suposiciones iniciales ni ajustes posteriores. Los valores de la energía en el nudo i, tienen una diferencia de mayor magnitud, porque en el procedimiento 1 este valor es calculado sin considerar la carga de velocidad en la descarga C.

Solución automatizada utilizando Mathcad. El procedimiento propuesto por los autores, facilita la utilización de sistemas algebraicos computacionales, como el Mathcad. A continuación se muestra la solución del problema planteado utilizando dicho software.

Los datos son los siguientes:

Elevaciones:	$z_A := 50\text{m}$	$z_B := 70\text{m}$	$z_C := 0\text{m}$
Longitudes:	$L_1 := 680\text{m}$	$L_2 := 520\text{m}$	$L_3 := 800\text{m}$
Diámetros:	$D_1 := 0.55\text{m}$	$D_2 := 0.60\text{m}$	$D_3 := 0.80\text{m}$
Factores de fricción:	$f_1 := 0.0255$	$f_2 := 0.0249$	$f_3 := 0.0231$

La pérdida de energía puede expresarse en forma general como:

$$\text{Pérdidas por fricción: } h(f,L,D,Q) := f \frac{L}{D} \left(\frac{Q}{\frac{\pi D^2}{4}} \right)^2 \cdot \frac{1}{2g}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones que se plantea en el Mathcad, se requieren valores de inicio, que pueden ser:

$$Q_1 := 1 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \quad Q_2 := 1 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$Q_3 := 1 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \quad E_i := 50 \text{ m}$$

Planteando las ecuaciones de continuidad y de la energía para la red abierta unitaria y utilizando la función "Given... Find" se obtiene:

Given

$$z_A = E_i + \frac{Q_1}{|Q_1|} \cdot h(f_1, L_1, D_1, Q_1)$$

$$z_B = E_i + \frac{Q_2}{|Q_2|} \cdot h(f_2, L_2, D_2, Q_2)$$

$$z_C + \frac{Q_3}{|Q_3|} \left(\frac{Q_3}{\frac{\pi D_3^2}{4}} \right)^2 \cdot \frac{1}{2g} = E_i + \frac{Q_3}{|Q_3|} \cdot h(f_3, L_3, D_3, Q_3)$$

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Para considerar que las pérdidas de energía pueden ser añadidas o sustraídas de la energía del extremo, dependiendo si el flujo ingresa o egresa del mismo, se incluye en las ecuaciones anteriores una relación de gastos (gasto entre el módulo del gasto).

Las soluciones, utilizando la función mencionada del Mathcad, serían:

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ E_i \end{pmatrix} := \text{Find}(Q_1, Q_2, Q_3, E_i)$$

$$Q_1 = 0.85 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$Q_2 = 1.717 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$Q_3 = -2.568 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$E_i = 29.406 \text{m}$$

Debe mencionarse que cuando el gasto ingresa el nudo, tiene signo positivo; en caso contrario, el signo es negativo.

CONCLUSIONES

- El desarrollo presentado por los autores, expone claramente los conceptos de red abierta unitaria, sirviéndose de los principios de las ecuaciones de energía y de continuidad utilizados ampliamente en la Hidráulica.
- Justifica su empleo al plantear de forma directa las ecuaciones sin supuestos iniciales ni ajustes finales para encontrar la solución algebraica y física del problema.
- Al presentar estos conceptos en forma estructurada, su comprensión se facilita y se hace más didáctica, por lo cual se recomienda su utilización tanto por estudiantes como por profesores.
- Como una muestra de su bondad, el procedimiento propuesto permite la utilización de una herramienta computacional conocida como Mathcad, la cual confirma la validez del desarrollo, comprueba el caso numérico y agiliza el procedimiento de análisis hidráulico.

BIBLIOGRAFÍA

1. Larsen R.W. (2001). "Introduction to Mathcad 2000", Prentice Hall, New Jersey.
2. Mathsoft Engineering & Education Inc. (2002). Mathsoft Mathcad 11: User's guide. Mathsoft Engineering & Education Inc.
3. Sotelo Ávila Gilberto. (1999). "Hidráulica General. Volumen 1: Fundamentos". Editorial Limusa, México, D.F.
4. Streeter V.L., Wylie E.B, Bedford K.W. (2000). "Mecánica de Fluidos", 9ª. Edición, McGraw-Hill, Colombia.