Obtención de la ecuación de Euler-Lagrange utilizando los vectores base y vectores recíprocos

César Renán Acosta

RESUMEN

En general las ecuaciones de Euler-Lagrange, fundamentales en el estudio de la Mecánica Clásica y punto de partida de la Mecánica Cuántica, se obtienen a partir de análisis de variaciones o de minimales de funcionales. Sin embargo en este trabajo se obtienen utilizando como fundamento el análisis vectorial, así como las definiciones centrales de la Mecánica Newtoniana, como son velocidades, aceleraciones, momentos lineales y angulares y sobre todo fuerzas.

Partiendo de los sistemas físicos descritos en coordenadas cartesianas, pero expresados en función de los parámetros del movimiento, se obtienen de manera natural los conceptos de velocidad, momento y fuerza generalizada, así como las relaciones de la energía cinética traslacional con las velocidades y aceleraciones generalizadas.

Palabras clave: Vectores base, sistemas de referencia, coordenadas generalizadas.

INTRODUCCIÓN

La Mecánica de Newton, es la parte de la Física que estudia las fuerzas que se ejercen en la interacción de los cuerpos, y con ella podemos modelar y entender casi todo lo que pasa a nuestro alrededor, como porque un móvil se detiene al desplazarse por una superficie rugosa, el movimiento oscilatorio de un péndulo, la trayectoria parabólica en un lanzamiento de jabalina y aún el movimiento de los planetas a través del sistema solar.

La naturaleza de estas leyes newtonianas es vectorial y por tanto requieren de las diferentes operaciones que implica el uso de magnitudes con dirección y sentido, como suma y resta, productos punto y cruz, así como gradientes, divergencia y rotacional. Lo cual para sistemas complejos implica una gran dificultad en el análisis del problema, sobre todo si se tiene en cuenta los diferentes marcos de referencia, inerciales o acelerados. Otra limitación de la Mecánica de Newton es cuando el objeto de estudio son los átomos, moléculas, electrones, protones, etc., para lo cual se utiliza la Mecánica Cuántica.

Existe, sin embargo, otra formulación para la Mecánica Clásica, que partiendo de la física vectorial de Newton, hace generalizaciones en cuanto a los sistemas coordenados y tipos de fuerzas que interactúan en un evento, llevando todo el análisis de su naturaleza vectorial a un estudio de componentes escalares del movimiento. Por lo que, en este trabajo se muestra cómo se obtiene esa forma alternativa de solucionar los problemas que impliquen movimiento. Es importante mencionar que esta formulación no es la solución total, ya que no puede utilizarse en problemas de estática.

Vectores base y recíprocos

Un conjunto de tres vectores no nulos μ_1, μ_2, μ_3 constituyen una base ortogonal si y sólo si son mutuamente ortogonales (Hsu, 1987), es decir:

$$\left.\begin{array}{r}\mu_m \cdot \mu_n = 0 \text{ para todos los } m \neq n \\ \mu_m \cdot \mu_n = \mu^2 \text{ para todos los } m = n\end{array}\right\} =$$

$$\mu_m \cdot \mu_n = \mu^2 \delta_{mn}$$

donde δ_{mn} es la delta de Kronecker, y se tiene una base ortonormal si este conjunto de tres vectores es unitario $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3$, es decir:

$$\hat{\mu}_m \cdot \hat{\mu}_n = \delta_{mn} = \begin{Bmatrix} 1 \text{ si } m = n \\ 0 \text{ si } m \neq n \end{Bmatrix}.$$

Así, un vector cualquiera $\vec{A}$ se puede escribir en la dirección de su base de vectores unitarios como:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \left[\left(A_1\hat{\mu}_1 + A_2\hat{\mu}_2 + A_3\hat{\mu}_3\right)\cdot \hat{\mu}_1\right]\hat{\mu}_1 \\ &+ \left[\left(A_1\hat{\mu}_1 + A_2\hat{\mu}_2 + A_3\hat{\mu}_3\right)\cdot \hat{\mu}_2\right]\hat{\mu}_2 \\ &+ \left[\left(A_1\hat{\mu}_1 + A_2\hat{\mu}_2 + A_3\hat{\mu}_3\right)\cdot \hat{\mu}_3\right]\hat{\mu}_3 \end{aligned}$$

que de manera condensada es:

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^{3}\left(\vec{A}\cdot\hat{\mu}_i\right)\hat{\mu}_i \,. \tag{1}$$

Definiendo un sistema coordenado, al cual llamaremos generalizado con representación q_1, q_2, q_3. Las coordenadas cartesianas son función de dichas coordenadas generalizadas, esto es:

$$x = x(q_1,q_2,q_3); \qquad y = y(q_1,q_2,q_3); \qquad z = z(q_1,q_2,q_3);$$

Entonces, el vector de posición $\vec{r}$ se puede expresar en función de los vectores unitarios de coordenadas cartesianas de la siguiente manera:

$$\vec{r} = x(q_1,q_2,q_3)\hat{i} + y(q_1,q_2,q_3)\hat{j} + z(q_1,q_2,q_3)\hat{k} \,.$$

A partir de la definición anterior se construye una nueva base de vectores como (Hsu, 1987):

$$\vec{b}_i = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}, \tag{2}$$

este vector base generalizado, en coordenadas cartesianas es:

$$\vec{b}_i = \frac{\partial x}{\partial q_i}\hat{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\hat{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\hat{k}, \tag{3}$$

como el vector anterior no es unitario, deberemos dividir entre su propia magnitud, la cual se conoce como coeficiente métrico o factor de escala, y se representa por:

$$h_i = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right|,$$

por lo cual el vector unitario queda expresado como:

$$\hat{e}_i = \frac{\vec{b}_i}{h_i}. \tag{4}$$

Adicional a esta base existe otra que se conoce como la base recíproca cuyos vectores se representan por $\vec{c}_i$, con la siguiente propiedad:

$$\vec{c}_i \cdot \vec{b}_j = \delta_{ij}.$$

se observa que el vector $\vec{c}_i$ tiene la misma dirección de $\vec{b}_i$ pero sus magnitudes son recíprocas:

$$\bar{c}_i = \frac{1}{h_i}\hat{e}_i,$$

y en función de $\vec{b}_i$ es

$$\bar{c}_i = \frac{\vec{b}_i}{h_i^2}, \tag{5}$$

otra forma de escribir al vector recíproco es

$$\vec{c}_i = \frac{\partial q_i}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial q_i}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial q_i}{\partial z}\hat{k}. \tag{6}$$

Componente covariante y contravariante de la velocidad

Bajo la notación de vectores base y recíprocos, el vector velocidad se representa como:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{3}\left(\vec{v}\cdot\hat{e}_i\right)\hat{e}_i$$

es claro que el vector velocidad tiene dos formas equivalentes de escribirse, una en función de la base

$\vec{b}_i$ y otra en función de la base recíproca $\vec{c}_i$. La primera forma es:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{3}\left(\vec{v}\cdot\frac{\vec{b}_i}{h_i}\right)\frac{\vec{b}_i}{h_i} = \sum_{i=1}^{3}\left(\vec{v}\cdot\vec{b}_i\right)\frac{\vec{b}_i}{h_i^2}, \tag{7}$$

obteniendo el producto punto de los vectores velocidad y base. Tomando en cuenta la ecuación (5), la velocidad es (Hausser, 1969):

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{3}\left(\vec{v}\cdot\vec{b}_i\right)\hat{c}_i, \tag{8}$$

el término entre paréntesis es una componente vectorial de la velocidad en la dirección de $\vec{b}_i$, pero se encuentra definida ahora en función de las coordenadas generalizadas q_1, q_2, q_3 y se le conoce como la componente covariante de la velocidad, es decir:

$$v_i = \vec{v}\cdot\vec{b}_i, \tag{9}$$

en coordenadas cartesianas es:

$$v_i = \left(v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\hat{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\hat{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\hat{k}\right).$$

Realizando el producto punto y sustituyendo v_1, v_2, v_3 por $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ nos queda la componente covariante de la velocidad como:

$$v_i = \dot{x}\frac{\partial x}{\partial q_i} + \dot{y}\frac{\partial y}{\partial q_i} + \dot{z}\frac{\partial z}{\partial q_i} \tag{10}$$

observemos que las coordenadas cartesianas x, y, z son funciones de las coordenadas generalizadas q_1, q_2, q_3, pero no son funciones explícitas del tiempo. Por lo que si derivamos cualquiera de ellas respecto de *t*, aplicando la regla de la cadena, se obtiene:

$$\frac{dx}{dt} = \sum_i \frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt},$$

es decir que la velocidad en coordenadas generalizadas es:

$$\dot{x} = \sum_i \frac{\partial x}{\partial q_i}\dot{q}_i$$

podemos ver que el término de la derivada parcial de *x*, depende de las coordenadas generalizadas, pero no de las velocidades generalizadas $\dot{q}_i$, entonces, si derivamos parcialmente respecto de estas velocidades generalizadas, se obtiene:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial x}{\partial q_i}, \tag{11}$$

sustituyendo la ec. (11) en la componente covariante de la velocidad, ec. (10):

$$v_i = \dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_i} + \dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_i} + \dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_i}, \tag{12}$$

la cual podemos factorizar como un producto punto de la siguiente manera:

$$v_i = \vec{v}\cdot\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i}.$$

Para obtener una relación equivalente derivemos parcialmente el producto punto del vector velocidad por si mismo, respecto de la coordenada generalizada $\dot{q}_i$:

$$\frac{\partial\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i},$$

al ser el producto punto conmutativo, los dos términos son iguales, además de que el producto escalar de un vector por si mismo es el vector elevado al cuadrado:

$$\vec{v}\cdot\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{1}{2}v^2\right), \tag{13}$$

así, la componente covariante de la velocidad se puede escribir como (Hausser, 1969):

$$v_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{1}{2}v^2\right), \tag{14}$$

si multiplicamos ambos lados de la igualdad por la masa nos queda, en el lado izquierdo el momento generalizado y en el lado derecho la derivada parcial de la energía cinética respecto de la velocidad generalizada:

$$mv_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{1}{2}mv^2\right), \qquad (15)$$

lo cual nos muestra una metodología de solución de los problemas de mecánica en cualquier sistema de coordenadas, partiendo de una descripción en coordenadas cartesianas, ya que la magnitud de la velocidad total es:

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ ,$$

el método opera de la siguiente manera, se describe el movimiento de los objetos que interactúan en un momento t cualquiera a partir de sistema de coordenadas cartesianas fijo. Se derivan las componentes cartesianas respecto del tiempo y finalmente la magnitud de la velocidad es la suma de estas derivadas elevadas al cuadrado. De esta descripción se obtienen las coordenadas generalizadas, que serán los parámetros del movimiento. Al multiplicar esta velocidad generalizada por la masa, nos quedan los momentos generalizados.

Si modificamos la ec. (5), insertando el factor de escala, dentro del paréntesis, se obtiene:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{3}\left(\vec{v}\cdot\frac{\vec{b}_i}{h_i^2}\right)\vec{b}_i\ , \qquad (16)$$

en la que el producto punto está ahora en función del vector recíproco, el cual se conoce como la componente contravariante del vector velocidad, esta componente se representa por:

$$v_i^* = \vec{v}\cdot\vec{c}_i\ , \qquad (17)$$

siguiendo el mismo procedimiento que en la componente covariante, se obtiene:

$$v_i^* = \dot{x}\frac{\partial q_i}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial q_i}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial q_i}{\partial y}\ , \qquad (18)$$

escribiendo las velocidades en coordenadas cartesianas, como derivadas parciales:

$$v_i^* = \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial q_i}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial q_i}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial q_i}{\partial y}\ , \qquad (19)$$

se puede ver que esto es solamente la aplicación de la regla de la cadena, por lo que se escribe como:

$$v_i^* = \dot{q}_i\ , \qquad (20)$$

es decir que la componente contravariante de la velocidad es la velocidad generalizada (Hausser, 1969).

4 Aceleraciones covariantes, contravariantes y fuerzas generalizadas

De la misma manera que con la velocidad se obtienen las componentes contravariante y covariante, obtenemos para la aceleración,

$$a_i^* = \ddot{x}\frac{\partial q_i}{\partial x} + \ddot{y}\frac{\partial q_i}{\partial y} + \ddot{z}\frac{\partial q_i}{\partial z}\ ,$$

en la que si tomamos el resultado de la ec. (11), se expresa como:

$$a_i^* = \frac{\partial \dot{x}}{\partial t}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial t}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial t}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{z}} = \ddot{q}_i\ ,$$

es decir, la aceleración contravariante es igual a la aceleración generalizada. Para la aceleración covariante se tiene:

$$a_i = \ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_i} + \ddot{y}\frac{\partial y}{\partial q_i} + \ddot{z}\frac{\partial z}{\partial q_i}\ , \qquad (21)$$

haciendo la derivada respecto del tiempo de la coordenada cartesiana x, y generalizando a las otras coordenadas.

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial x}{\partial q_i}\right) = \ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_i} + \dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right), \qquad (22)$$

despejando la ec. (22) y sustituyendo el resultado obtenido en la ec. (11), se obtiene:

$$\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_i}. \qquad (23)$$

Agrupando los términos de la aceleración covariante,

$$a_i = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_i} + \dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_i} + \dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_i} + \dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial q_i} + \dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial q_i} \right). \quad (24)$$

Hagamos la derivada parcial del producto punto del vector velocidad por si mismo, respecto de la coordenada generalizada q_i:

$$\frac{\partial(\vec{v}\cdot\vec{v})}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i}, \quad (25)$$

en la que la ec. (25) se simplifica como:

$$\vec{v}\cdot\frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{2}v^2\right), \quad (26)$$

sustituyendo en la ec. (24), y utilizando el resultado obtenido en la ec. (13),

$$a_i = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{1}{2}v^2\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{2}v^2\right), \quad (27)$$

así, la aceleración covariante queda expresada en función de la velocidad total (Hausser, 1969). Si además multiplicamos ambos lados de la igualdad por la masa, en el lado izquierdo nos queda la fuerza covariante o generalizada, y en el lado derecho una expresión que depende de la energía cinética traslacional (*T*).

$$F_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}. \quad (28)$$

Escribamos la componente covariante de la fuerza, como el producto punto del vector fuerza y el vector base $\vec{b}_i$:

$$F_i = \vec{F}\cdot\vec{b}_i, \quad (29)$$

si ahora expresamos la fuerza como menos el gradiente de la energía potencial (*U*):

$$F_i = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\hat{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\hat{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\hat{k}\right), \quad (30)$$

lo que muestra que la componente covariante de la fuerza es menos la derivada parcial de la energía potencial respecto de la coordenada generalizada q_i:

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}. \quad (31)$$

Si ponemos la condición de que se utilicen solo fuerzas conservativas, es decir fuerzas que dependen únicamente de la posición o coordenada generalizada $U = U(q_i)$, entonces si derivamos parcialmente la energía potencial respecto de las velocidades generalizadas, se obtiene:

$$\frac{\partial U(q_i)}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad (32)$$

rescribiendo la ec. (28) tomando en cuenta la ec. (31),

$$-\frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}, \quad (33)$$

organizando los términos en (33),

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial(T-U)}{\partial q_i} = 0, \quad (34)$$

si en la parte que corresponde a la derivada respecto de la velocidad generalizada sustituimos el resultado obtenido en la ec. (32), el resultado no cambia.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial(T-U)}{\partial q_i} = 0, \quad (35)$$

si ahora llamamos $L = T - U$, al termino de la diferencia de energías, se obtiene la ecuación de Euler-Lagrange (Hausser, 1969; Marion, 1992;

Barger et al 1973; Simon 1971; Landau et al, 1982; Goldstein 1990), la cual es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0\,. \qquad (36)$$

Esta ecuación, tiene la restricción de que sólo se puede aplicar a fuerzas conservativas, ya que así se incluyó la parcial de la energía potencial respecto de la velocidad generalizada. Si existen pérdidas éstas se reflejan igualando la ecuación de Euler-Lagrange a Q_i, donde Q_i representa la suma de todas las fuerzas no conservativas (Hausser, 1969; Marion, 1992; Barger et al 1973; Simon 1971; Landau et al, 1982; Goldstein 1990).

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_i \qquad (37)$$

Comentarios finales

Las ecuaciones (36) y (37) se conocen como ecuaciones de movimiento de Lagrange y a la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial, se le conoce como la lagrangiana. La importancia de estas ecuaciones es enorme, ya que simplifican la aplicación de la física a sistemas complejos, y son punto de partida de la Mecánica Cuántica.

Se muestra en este desarrollo, que la obtención de las ecuaciones de Euler-Lagrange son consecuencia de las ecuaciones de Newton, y que se pueden obtener sin utilizar el concepto del funcional, y sin requerir la minimización de estos, que sin embargo lleva a la conceptualización de que si un sistema está en equilibrio dinámico, entonces tiene su mínima energía. Esta situación se pone de manifiesto en este procedimiento, al exigir que la energía potencial sea solo función de la posición y no de la velocidad generalizada.

La aplicación de la ecuación de Euler-Lagrange, tiene ventajas operativas sobre las ecuaciones vectoriales de Newton, ya que al aplicarlas para cada coordenada generalizada, nos da como resultado un sistema de ecuaciones diferenciales, cuya solución nos expresa todas las fuerzas generalizadas que interactúan. Otra ventaja es que la conservación del momento generalizado se puede verificar únicamente, checando las dependencias de la función de energía cinética, ya que si una función tiene dependencia de las velocidades generalizadas, pero no de la posición, existirá conservación de momentum, como se puede ver en la ec. (36).

BIBLIOGRAFÍA

1) Hwei P. Hsu, (1987); "Análisis vectorial", Addison-Wesley Iberoamaericana (Delaware), pp. 21-38.

2) Hausser W. (1969); "Introducción a los principios de mecánica", Uteha, (México), pp. 37-58, 65-82, 187-167.

3) Marion B. J. (1992), "Dinámica clásica de las partículas y sistemas", 4ª edición, Reverté, (España) pp. 201-267.

4) Barger V. & Olson M. (1973) "Classical mechanics", McGraw-Hill (New York), pp. 31-75.

5) Simon K. R. (1971), "Mechanics" 3ª edición, Addison-Wesley (Filipinas), pp. 353-395.

6) Landau L. y Lifshitz E. (1982) "Mecánica y Electrodinámica" Mir (Moscú), pp. 11-20.

7) Goldstein H. (1990), "Mecánica clásica", Reverté (Barcelona), pp. 43-66.