

Cálculo de bombas sumergibles asistido por sistemas algebraicos computacionales

Jorge García Sosa¹, Armando Morales Burgos², Nicolás Zaragoza Grifé³

Recibido el 25 de mayo de 2005 – Aceptado el 26 de agosto de 2005

RESUMEN

El cálculo de equipos de bombeo es una tarea que generalmente se realiza a través de las curvas características que obtiene cada fabricante para sus equipos; por tanto, dicho cálculo es laborioso y susceptible a errores. En el presente trabajo, se realiza una propuesta del cálculo automatizado de bombas sumergibles, basado en sistemas algebraicos computacionales (SAC), de tal manera que el tiempo de cálculo y especialmente el margen de error, se reducen considerablemente. Adicionalmente, esta forma de realizar el cálculo mencionado, permite que los estudiantes de ingeniería integren los conocimientos que han adquirido en los semestres iniciales de su formación profesional.

Palabras clave: equipos de bombeo, sistemas algebraicos computacionales, bombas sumergibles, Mathcad.

A design method for submersible pumps based on computational algebraic systems

ABSTRACT

Pumping equipment design is usually carried out using the characteristic graphs that manufacturers supply with their equipments; therefore, calculations are laborious and prone to errors. An automated design method for submersible pumps, based on computational algebraic systems (CAS), is proposed in this paper. The suggested method not only reduces considerably calculation time, but also the margin of error. Furthermore, it allows engineering students to integrate previously acquired knowledge in the design process.

Keywords: pumping equipment, computational algebraic systems, submersible pumps, Mathcad.

¹ Profesor de Carrera del Cuerpo Académico de Hidráulica e Hidrología. FIUADY. gsosa@tunku.uady.mx

² Profesor de Carrera del Cuerpo Académico de Hidráulica e Hidrología. FIUADY.

³ Profesor de Carrera del Cuerpo Académico de Construcción. FIUADY.

INTRODUCCIÓN

La hidráulica es una disciplina de la ingeniería que, debido a la multiplicidad de herramientas matemáticas, experimentales y de cómputo que utiliza en la solución de problemas asociados a la misma, nos proporciona la oportunidad de lograr la integración de los conocimientos que los estudiantes han adquirido en sus etapas iniciales de formación. En el caso de la hidráulica, se pueden elegir diversos temas para motivar al estudiante a usar las herramientas de que dispone; en este trabajo, se presenta el proceso de cálculo de equipos de bombeo sumergibles. Puede observarse que para lograr lo anterior, se debe hacer uso de las curvas características de dichos equipos de bombeo, de las técnicas de ajuste de curvas y de elementos básicos de programación.

Hemos considerado para este trabajo, el cálculo de equipos de bombeo tipo sumergible (Figura 1), debido a varios factores; entre los principales, podemos enumerar la facilidad de instalación a pesar de diámetros libres de ademe reducidos o nulos, el menor costo de inversión inicial, la posibilidad de utilizar este tipo de equipo de bombeo a cualquier profundidad del nivel dinámico de bombeo, etc. Este equipo de bombeo, puede ser calculado de manera usual, con la ayuda de tablas y gráficas de sus curvas de operación.



Figura 1. Equipo de bombeo tipo sumergible.

Es importante considerar que las curvas de operación de los equipos de bombeo en muchos casos, fueron trazadas con un número reducido de puntos de medición, por lo que no es posible saber la precisión con que estas gráficas representan las

características de dichos equipos; por ejemplo, las relaciones de gasto contra carga dinámica total, gasto contra eficiencia, etc.

En este trabajo se realiza el cálculo de los equipos de bombeo sumergibles de una manera distinta e innovadora al incorporar e integrar conocimientos básicos adquiridos por los estudiantes en las asignaturas de métodos numéricos, álgebra matricial, programación, etc. para que con la ayuda de la computadora establezcan un procedimiento que ayude a realizar el cálculo mencionado de un manera rápida y reduciendo el margen de error.

METODOLOGÍA

El Sistema Algebraico Computacional (SAC) utilizado en este trabajo es el MathCad, mismo que se ha seleccionado debido a su gran flexibilidad para el manejo de expresiones matemáticas, que permite un mejor control de los procesos que se realizan, además de la gran simplicidad para su manejo.

El procedimiento que se presenta permite calcular el cuerpo de tazones, su eficiencia, el número de impulsores, la potencia en la bomba, el número de tramos de tubería de descarga, así como el diámetro de la tubería de descarga con base en los datos del gasto, de la carga dinámica total requerida, del peso específico del fluido bombeado, del nivel dinámico, de la longitud de los tramos de tubería de columna y de la velocidad de diseño en la tubería de descarga.

A continuación se describen cada una de las etapas del procedimiento de cálculo del equipo de bombeo seleccionado; como elemento básico, se dispone del catálogo de curvas de operación para equipos de bombeo marca MAK (Figura 2), mismo que puede ser representativo para cualquier otra marca; así como del gasto, la carga dinámica total requerida y el tipo de fluido a manejar.

Con base en las curvas de operación del gasto (Q) contra carga dinámica total (H), así como las de gasto (Q) contra eficiencia de la bomba (E), se seleccionaron tres grupos de datos en cada una; en el caso de la carga dinámica total, se utilizó la curva correspondiente a la proporcionada por un impulsor. Dichos grupos de datos corresponden a los gastos asociados a la máxima carga dinámica

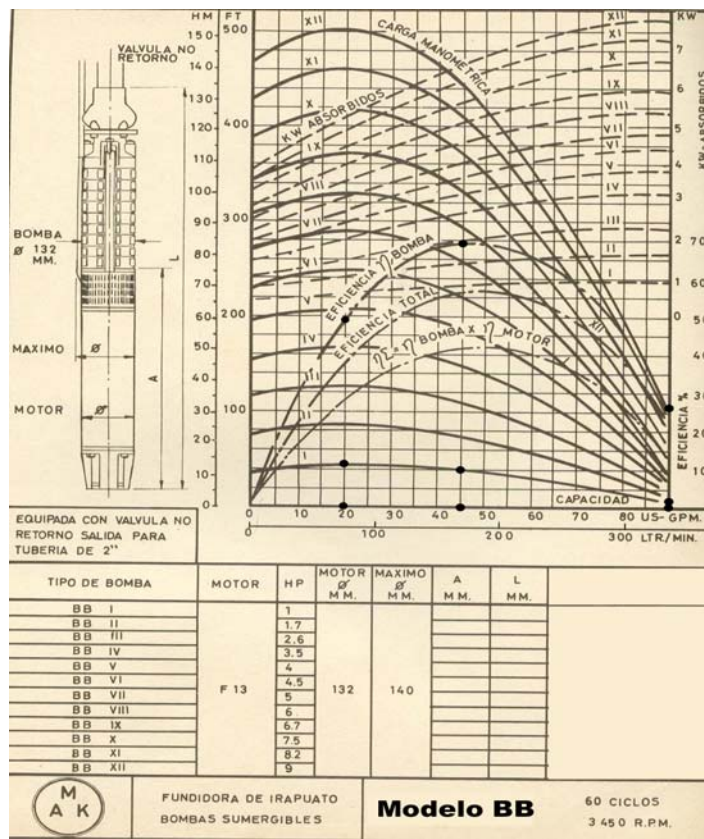


Figura 2. Curvas de operación para bomba sumergible modelo BB.

por impulsor, a la máxima eficiencia de la bomba y a los gastos asociados a los valores mínimo o máximo, según el caso, de carga o eficiencia.

De los grupos de datos mencionados, se procede al ajuste de curvas de tipo cuadrático de la forma:

$$H_3 = A \cdot Q_3^2 + B \cdot Q_3 + C \quad (1)$$

donde A, B y C son coeficientes resultado del ajuste de las curvas. De manera similar se realizó el ajuste para las curvas Q – E.

La figura 2, muestra las curvas de operación Gasto (Q) – Carga dinámica (H), marcadas con líneas continuas e identificadas con números romanos, asociadas a diversos gastos, desde uno hasta doce impulsores; puede considerarse, sin incurrir en grandes errores, que el incremento de carga dinámica asociado al número de impulsores tiene una variación constante, por lo que es suficiente realizar el ajuste de la curva para un impulsor, de

tal manera que para la determinación del número total de impulsores requeridos, basta dividir la carga dinámica total requerida entre la carga dinámica de un impulsor, redondeando dicho valor al número entero superior. Esta situación se repite en los 16 modelos de equipos de bombeo estudiados.

Puesto que la ecuación (1) tiene tres factores de ajuste, deben analizarse los tres grupos de datos mencionados anteriormente, obtenidos de la curva de operación del equipo de bombeo analizado, a fin de obtener un sistema lineal de ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} H_1 &= A \cdot Q_1^2 + B \cdot Q_1 + C \\ H_2 &= A \cdot Q_2^2 + B \cdot Q_2 + C \\ H_3 &= A \cdot Q_3^2 + B \cdot Q_3 + C \end{aligned} \quad (2)$$

Con base en los puntos seleccionados de la figura 2, para el modelo BB de bomba sumergible, la

solución del sistema lineal de ecuaciones nos queda:

$$\begin{bmatrix} Q_1^2 & Q_1 & 1 \\ Q_2^2 & Q_2 & 1 \\ Q_3^2 & Q_3 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix}$$

donde:

$$CQ = \begin{bmatrix} Q_1^2 & Q_1 & 1 \\ Q_2^2 & Q_2 & 1 \\ Q_3^2 & Q_3 & 1 \end{bmatrix},$$

son los coeficientes de gasto;

$$BBT = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix},$$

son las cargas dinámicas por impulsor;

$$X = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix},$$

son los coeficientes que resuelven el sistema lineal de ecuaciones.

Para la solución de sistemas lineales de ecuaciones cuyos coeficientes están ordenados en forma matricial, podemos utilizar la función "lsolve" del Mathcad. La sintaxis de la función mencionada es *lsolve(M,v)* y permite obtener un vector que resuelve el sistema lineal de ecuaciones $M * x = v$; donde M , es una matriz cuadrada real o compleja no singular; v , es un vector real o complejo, que tiene el mismo número de filas de M ; x , es el vector solución del sistema lineal de ecuaciones. Esta función utiliza un algoritmo de solución basado en el método de descomposición LU, que utiliza el método de Crout con pivoteo parcial (Press W.H. et al, 1986).

Para el modelo de equipo de bombeo al cual aplicamos el ajuste, de la curva de operación mostrada en la figura 2, se tienen los siguientes datos:

$$CQ = \begin{bmatrix} 20^2 & 20 & 1 \\ 45^2 & 45 & 1 \\ 90^2 & 90 & 1 \end{bmatrix}$$

que corresponden a los gastos asociados a la máxima carga dinámica por impulsor, a la máxima eficiencia de la bomba y al valor máximo del mismo.

En el caso de la carga dinámica por impulsor asociada a los gastos mencionados se obtiene:

$$BBT = \begin{bmatrix} 45 \\ 40 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Aplicando la función de Mathcad mencionada anteriormente y que será referida como BBH ($BBH := lsolve(CQ, BBT)$), se obtendrá la solución del sistema lineal de ecuaciones planteado para las curvas Gasto (Q) - Carga dinámica por impulsor (H) para el modelo de bombas BB; la solución del sistema lineal de ecuaciones, es decir, los coeficientes que resuelven dicho sistema, son:

$$BBH = \begin{bmatrix} -6.667 \times 10^{-3} \\ 0.233 \\ 43 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la ecuación que representa la curva Gasto (Q) - Carga dinámica por impulsor (H) para el modelo de bombas BB se muestra inmediatamente; a fin de obtener la ecuación en unidades similares a las curvas de operación originales se hace un ajuste de unidades en la expresión. Así, se tiene:

$$BBH(Q) := \left[(BBH_0) \cdot \left(\frac{Q}{\frac{\text{gal}}{\text{min}}} \right)^2 + BBH_1 \cdot \left(\frac{Q}{\frac{\text{gal}}{\text{min}}} \right) + BBH_2 \right] \cdot \text{ft} \quad (3)$$

Este procedimiento se repite para las curvas de eficiencia del equipo de bombeo con objeto de obtener la ecuación que nos representa la relación entre el gasto (Q) y la eficiencia (E); tenemos:

$$BBF = \begin{bmatrix} 49.15 \\ 69 \\ 26.66 \end{bmatrix},$$

los cuales son los valores de la eficiencia asociadas a los gastos analizados.

Definiendo BBE como $BBE := \text{lsolve}(CQ, BBF)$, obtendremos la solución del sistema lineal de ecuaciones planteado para las curvas Gasto (Q) – Eficiencia de la bomba (E) para el modelo de bombas BB:

$$BBE = \begin{bmatrix} -0.025 \\ 2.405 \\ 10.964 \end{bmatrix}$$

La ecuación para la relación Gasto (Q) – Eficiencia de la bomba (E) nos queda:

$$BBE(Q) := \left[(BBE_0) \cdot \left(\frac{Q}{\frac{\text{gal}}{\text{min}}} \right)^2 + BBE_1 \cdot \left(\frac{Q}{\frac{\text{gal}}{\text{min}}} \right) + BBE_2 \right] \quad (4)$$

La figura 3 muestra para un rango de gastos que varían de 0 gal/min a 90 gal/min, las curvas de operación obtenidas con base en las ecuaciones (3) y (4); con objeto de obtener las curvas de operación en unidades similares a las originales, se realiza un ajuste de unidades en la figura mencionada.

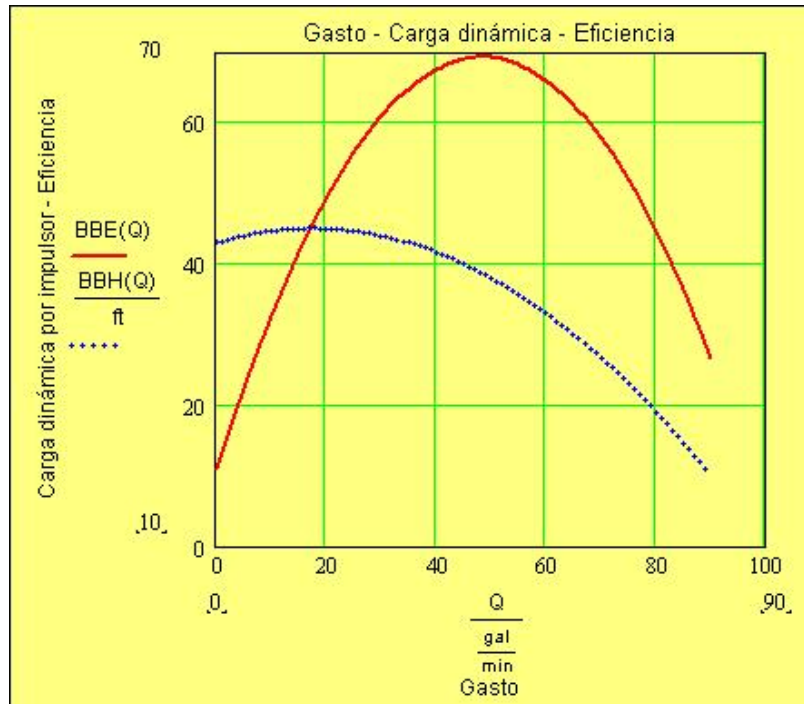


Figura 3. Curvas de operación Gastos – Carga dinámica por impulsor – Eficiencia.

Aplicando el procedimiento anterior a los dieciséis modelos de equipos de bombeo sumergibles, se obtienen los coeficientes de solución para las curvas de operación de gastos contra eficiencias y cargas dinámicas por impulsor. Los coeficientes de solución obtenidos en forma independiente, se manipulan mediante la función del Mathcad que permite ensamblar

matrices a partir de submatrices o vectores; se utiliza la función “*augment(M,N,...Z)*”. Por tanto, tenemos dos matrices de coeficientes de soluciones: uno, asociado a las eficiencias de los equipos de bombeo, representado por CEF; y otro, relacionado con las cargas dinámicas por impulsor, representado por CH. Ambas matrices de coeficientes se muestran a continuación.

$$CEF = \begin{pmatrix} -0.128 & -0.025 & -0.0051 & -0.0011 & -0.019 & -0.011 & -0.0074 & -0.0032 & -0.0021 & -0.0008 & -0.0002 & -0.0005 & -0.0027 & -0.0009 & -0.0003 & -0.0002 \\ 5.689 & 2.405 & 1.192 & 0.55 & 2.006 & 1.655 & 1.431 & 0.957 & 0.744 & 0.482 & 0.24 & 0.393 & 0.917 & 0.536 & 0.273 & 0.274 \\ -3.011 & 10.964 & 1.24 & 1.66 & 4.932 & 4.8 & 4.583 & 3.363 & 2.5 & 1.42 & 0 & 0 & -9.126 & -4.24 & 0 & -13.375 \end{pmatrix}$$

$$CH_m = \begin{pmatrix} -0.032 & -0.0067 & -0.0008 & -0.0002 & -0.014 & -0.0067 & -0.0036 & -0.0017 & -0.0011 & -0.0003 & -0.0001 & -0.0001 & -0.0028 & -0.0013 & -0.0002 & -0.0002 \\ 0.28 & 0.233 & -0.035 & -0.0041 & 0.661 & 0.533 & 0.326 & 0.255 & 0.179 & -0.0019 & 0.0027 & -0.0073 & 0.604 & 0.44 & 0.027 & 0.12 \\ 45.484 & 43 & 50 & 46.66 & 79.714 & 69.997 & 74.773 & 68.327 & 72.77 & 103.08 & 85 & 98.4 & 98.017 & 113.627 & 130 & 131.579 \end{pmatrix} \text{ m}$$

Las matrices de coeficientes anteriores, serán utilizadas para obtener las ecuaciones representativas de las curvas de operación de gasto contra carga dinámica por impulsor y contra eficiencia de los equipos de bombeo. Una vez obtenidas las ecuaciones representativas de las curvas de operación mencionadas, para realizar los cálculos de los equipos de bombeo sumergibles, debemos tener como datos iniciales: el gasto, la carga dinámica total requerida, el peso específico del fluido bombeado, la profundidad al nivel dinámico, la longitud de los tramos de tubería de descarga y la velocidad de diseño en la tubería de descarga.

El procedimiento, mostrado en la figura 4, es el siguiente: se establecerán las ecuaciones representativas para las eficiencias de todos los modelos de los equipos de bombeo sumergibles; inmediatamente, con base en una subrutina del programación elaborada en Mathcad, se calcularán las eficiencias para todos los modelos de bombas sumergibles, obtendremos la máxima eficiencia, así como el número de orden del modelo de bomba sumergible que proporciona dicha eficiencia. Posteriormente, se procede a determinar con base en el número de orden del modelo de bomba de máxima eficiencia y de la ecuación ajustada de gasto contra carga dinámica por impulsor, la carga dinámica proporcionada por impulsor para dicho modelo; una vez realizado lo anterior, con base en la eficiencia obtenida, se obtendrá la potencia requerida por el equipo de bombeo. Una vez obtenida la carga dinámica por impulsor, calculamos el número total de impulsores, dividiendo la carga dinámica total requerida entre este último valor, redondeándolo al número entero inmediato superior.

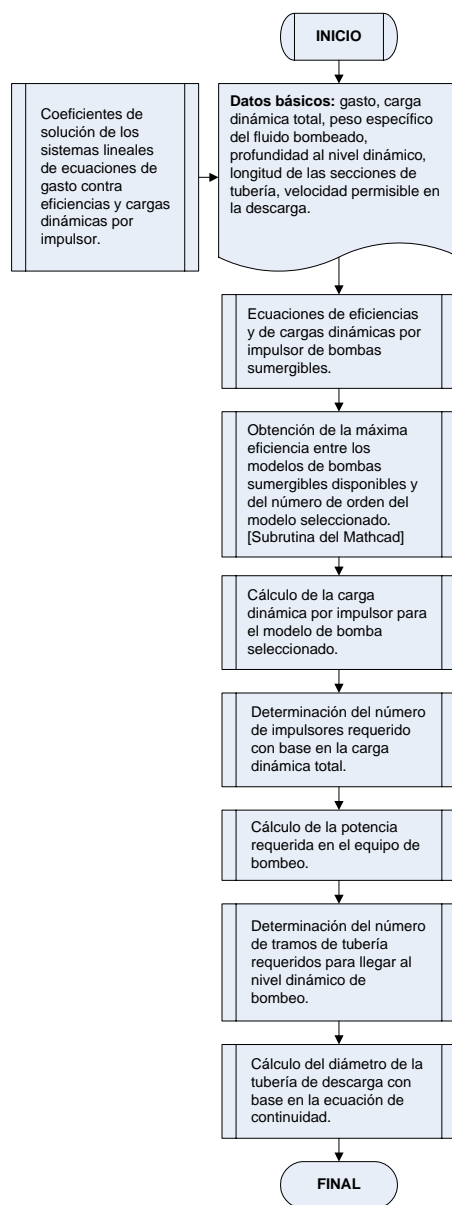


Figura 4. Procedimiento para el cálculo de equipos de bombeo sumergibles.

El número de tramos de tubería requeridos para llegar a la profundidad del nivel dinámico, se obtiene dividiendo dicha profundidad entre la longitud de cada tramo de tubería, que usualmente es de 10 pies, y agregando tres tramos adicionales; finalmente, el diámetro de la tubería de descarga, se obtiene con base en la ecuación de continuidad y la velocidad máxima permisible en la descarga.

EJEMPLO DE APLICACIÓN

A continuación se muestra la aplicación del procedimiento anterior, utilizando el Mathcad, para el cálculo de un equipo de bombeo sumergible.

Como datos básicos tenemos q , como el gasto de diseño; PND , es la profundidad al nivel dinámico; CDT , es la carga dinámica total requerida; $LTramo$, es la longitud de los tramos de la tubería de descarga; γ , es el peso específico del fluido bombeado; y V_{dis} , es la velocidad de diseño para la tubería de descarga del equipo de bombeo; así:

$$q := 37.854 \frac{L}{s} \quad PND := 60m$$

$$CDT := 100m \quad LTramo := 3.05m$$

$$\gamma := 9806 \frac{N}{m^3} \quad V_{dis} := 1.8 \frac{m}{s}$$

Las expresiones de los coeficientes de gastos $Q(q)$ y su vectorización para la generación de las ecuaciones de las curvas de gastos contra eficiencias y cargas dinámicas por impulsor, se muestran a continuación:

$$Q(q) := \begin{bmatrix} \left(\frac{q}{\frac{gal}{min}} \right)^2 \\ \frac{q}{\frac{gal}{min}} \\ \left(\frac{q}{\frac{gal}{min}} \right)^0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{Q}(q) = \begin{pmatrix} 3.6 \times 10^5 \\ 599.998 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para la obtención de las ecuaciones de eficiencias, EEF , y de cargas dinámicas por impulsor, EH , asociadas a los gastos, se utilizan las matrices transpuestas de los coeficientes de soluciones CEF y CH ; las ecuaciones se muestran a continuación:

$$EEF := (CEF^T) \cdot \vec{Q}(q) \quad (5)$$

$$EH := CH^T \cdot Q(q) \cdot m \quad (6)$$

A continuación se muestra la subrutina utilizada para la selección de la máxima eficiencia y el resultado de la misma. Los datos básicos para que la subrutina opere son, A y j . A , es la matriz que se analizará, en este caso se trata de la matriz resultante de la ecuación (5); j , se asocia al número de columna que se revisará en la matriz especificada; en este ejercicio, j se asocia a la primera columna, cuyo valor es igual a cero. Los valores de n y k son contadores del número total de filas y del número de fila donde se encuentra el valor de máxima eficiencia, respectivamente. El proceso revisa la eficiencia para cada equipo de bombeo sumergible para el gasto de diseño, arrojando como resultados finales, la eficiencia máxima ($vmax$) y el número de la fila en que se encuentra (k).

```
MATCH(A, j) :=
| n ← rows(A)
| k ← 0
| vmax ← Ak,j
| for i ∈ 0.. n - 1
|   if vmax < Ai,j
|     | vmax ← Ai,j
|     | k ← i
| return (vmax k)
```

$$MATCH(EEF, 0) = (75.42 \ 10)$$

Una vez obtenida la eficiencia máxima, puede extraerse el valor de la matriz resultante, utilizando la función MATCH que se asocia a la fila cero y columna cero de dicha matriz. Tenemos, la expresión y su resultado:

$$eficiencia := \frac{MATCH(EEF, 0)_{0,0}}{100}$$

$$eficiencia = 0.754 \blacksquare$$

Utilizando en forma combinada la función MATCH, que nos proporciona el número de la fila en la que se

encuentra la máxima eficiencia y la ecuación (6), se obtiene la carga dinámica disponible por impulsor. Es conveniente, por facilidad de manejo, definir primero la fila, $FILA$, que se utilizará de la ecuación (6), para posteriormente obtener el valor de la carga dinámica por impulsor; con base en lo anterior, se tiene:

$$FILA := MATCH(EEF, 0)_{0,1}$$

$$FILA = 10 \blacksquare$$

La expresión anterior, proporciona la fila en la que se encuentra el impulsor para la eficiencia máxima. Inmediatamente, se define $CDImp$, como la expresión que nos proporciona la carga dinámica por impulsor para la eficiencia máxima; así:

$$CDImp := EH_{FILA,0}$$

$$CDImp = 61.357 \text{ m} \blacksquare$$

El número total de impulsores podemos obtenerlo con la expresión:

$$No_Impulsores := \frac{CDT}{CDImp}$$

$$No_Impulsores = 2 \blacksquare$$

La potencia requerida por el equipo de bombeo, se obtiene con:

$$P := \frac{q \cdot CDT \cdot \gamma}{\text{eficiencia}}$$

$$P(q, CDT) = 66.001 \text{ hp}$$

El número total de tramos de tubería de descarga, será:

$$NoTramos := \frac{PND}{LTramo} + 3$$

$$NoTramos = 23 \blacksquare$$

El diámetro de la tubería de descarga, se obtiene con:

$$\phi := \sqrt[4]{\frac{q}{\pi \cdot V \text{ dis}}}$$

$$\phi = 6.44 \text{ in}$$

En el caso del diámetro anterior, éste deberá incrementarse hasta el diámetro comercial existente inmediato superior.

CONCLUSIONES

El uso del Mathcad, que es un sistema aritmético computacional (SAC), permitió realizar las siguientes tareas rutinarias que se utilizan en el cálculo de una bomba de tipo sumergible:

- Obtención de la ecuación de las curvas características (Gasto-Carga, Gasto-Eficiencia); estas ecuaciones nos permitieron el trazo de las mismas y compararlas con las curvas del manual del fabricante, de donde pueden visualizarse pequeñas diferencias que se hicieron notar en los comentarios iniciales de este trabajo. Este procedimiento puede extrapolarse para la obtención de curvas que representan la carga neta de succión positiva requerida (NPSH), la potencia al freno que demanda la bomba (Brake Horse Power), etc.
- Selección del modelo de bomba que opera con la máxima eficiencia para un determinado gasto; para esto se desarrolló una subrutina que calcula la eficiencia para todos los modelos de bombas, las compara e identifica la que nos proporciona la máxima eficiencia.
- Automatización del proceso de cálculo del equipo de bombeo, lo cual permite reducir errores, como por ejemplo de lectura en las curvas de carga, de eficiencia, etc.

Debe mencionarse que este procedimiento puede generalizarse para diversos tipos de bombas centrífugas; solamente se requiere disponer de las curvas características que proporciona cada fabricante. Asimismo, es importante hacer notar que el uso de este procedimiento permite al estudiante la integración y el empleo de los conocimientos adquiridos en los primeros cursos de su formación profesional.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Fuchslcher, Schulz H. (1964). Bombas: funcionamiento, cálculo y construcción, Editorial Labor, S.A.
2. Karassik I. J., Messina J. P., Cooper P., Heald C.C. (2001). Pump Handbook, Third edition, McGraw Hill.
3. Karassik I.J., Roy C. (1987). Bombas centrífugas: selección, operación y mantenimiento, CECSA.
4. MAK. (1968). "Manual de curvas de operación de MAK", MAK.
5. Mathsoft Engineering & Education Inc. (2002). Mathsoft Mathcad 11: User's guide. Mathsoft Engineering & Education Inc.
6. Press W.H., Flannery B.P., Teukolosky S.A., Vetterling W.T. (1986). Numerical recipes in C, Cambridge Press.
7. Wahren U. (1997). Practical introduction to pumping technology, Gulf publishing company, Houston, Texas.