

Predicción del comportamiento de sustancias líquidas en mezclas heterogéneas mediante la diferencial de la densidad

Miguel Angel Huicab Leyva, Florencio Angulo Pool, Elizabeth Vázquez Borges*, Liliana San Pedro Cedillo

Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Yucatán, A.P. 150, Cordemex, Mérida, Yucatán, México.

Fecha de recepción: 18 de octubre de 2020 - Fecha de aceptación: 9 de diciembre de 2020

Resumen

En este trabajo se presenta una metodología para la determinación del comportamiento de cinco sustancias al conjuntarse dentro de una mezcla heterogénea a una temperatura ambiente. Esta estrategia se basa en el estudio de las relaciones existentes entre las densidades de cada sustancia, analizando su comportamiento individual mediante el concepto de la diferencial de una función. Para poder llevar esto a cabo, fue necesario definir las variables: masa del fluido y área de la base del reactor (como un factor del volumen) de la fórmula original de densidad, para obtener una función dependiente de una sola variable, en este caso, de la altura que alcanzaron los líquidos de forma individual dentro del reactor. Usando como referencia al agua, se calcularon las diferenciales de densidad de cada sustancia. Mediante ordenamiento creciente de las magnitudes obtenidas y con base en el hecho de que las sustancias menos densas flotan sobre aquellas cuya densidad es mayor, se pronosticó el comportamiento que tendrían las cinco sustancias al interactuar en el experimento “Torre de líquidos”. Los resultados de dicho experimento fueron los pronosticados mediante el cálculo, confirmando la eficacia de este método.

Palabras clave: Densidad; Mezcla; Diferencial; Torre de líquidos.

Prediction of the behavior of liquid substances in heterogeneous mixtures through the density differential

Abstract

This paper presents a methodology for determining the behavior of five substances when coming together within a heterogeneous mixture at an ambient temperature. This strategy is based on the study of the relationships between the densities of each substance, analyzing its individual behavior through the concept of the differential of a function. To be able to do this, it was necessary to define the variables: fluid mass and reactor base area (as a volume factor) of the original density formula, to get a dependent function of a single variable, in this

*vborges@correo.uady.mx

case, the height the liquids reached individually within the reactor. Using water as reference, the density differentials of each substance were calculated. By increasing the order of the magnitudes obtained and based on the fact that the less dense substances float on those whose density is greater, the behavior that the five substances would have when interacting in the experiment "Tower of liquids" was predicted. The results of this experiment were those predicted by calculation, confirming the effectiveness of this method.

Keywords: Density; Mixing; Differential; Liquid tower.

Introducción

Cuando se habla acerca de la materia, se hace referencia a todo lo que ocupa un lugar en el espacio y que posee masa; algunos autores agregan a la definición una característica más, como Petrucci *et al.* (2011) quienes dicen que "materia es todo lo que ocupa espacio, tiene una propiedad llamada masa y posee inercia" aunque bien podría considerarse a la inercia como una característica que viene implícita dentro de la primera definición. Además, la materia posee más propiedades, las cuales se clasifican de diversas maneras, una de ellas es en intensivas y extensivas, siendo que "Una magnitud extensiva depende del tamaño de la muestra observada, mientras que una magnitud intensiva es independiente del tamaño de la muestra observada" (Petrucci *et al.*, 2011). Así, dentro del primer grupo se engloban propiedades como la masa, el peso, el volumen, o la longitud; mientras que, en el segundo, entran propiedades como el punto de ebullición, el punto de fusión, dureza o viscosidad, por mencionar algunas.

Una segunda clasificación de las propiedades de la materia es en físicas y químicas; por una parte, las propiedades físicas son aquellas que son inherentes a la sustancia y están relacionadas con su existencia física, por lo cual se determinan sin alterar su composición, entre ellas se encuentran el color, el sabor, el punto de

fusión y de ebullición, etc.; por otro lado las propiedades químicas hacen referencia a aquellas que se miden según la capacidad de una sustancia para formar otras por medio de una reacción o descomposición (Hein y Arena, 1997).

Así pues, uno de los pilares para este trabajo es el concepto de densidad, la cual, es una propiedad que se puede clasificar como intensiva y física. Se conoce como densidad a la cantidad de masa por unidad de volumen de una sustancia. Debido a que el volumen que ocupa una sustancia varía con la temperatura es necesario señalarla al comunicar una medición de densidad (Gooch, 2011). Se calcula mediante la fórmula:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \text{Ec. (1)}$$

Donde:

- ρ = densidad del cuerpo; medida en $\frac{kg}{m^3}$ en unidades S.I, pero en este trabajo se manejará en $\frac{g}{cm^3}$
- m = masa del cuerpo; medida en kg en unidades S.I, pero en este trabajo se manejará en g
- V = volumen del cuerpo; medido en m^3 en unidades S.I, pero en este trabajo se manejará en cm^3 .

Gracias a esta fórmula se puede saber cuántas unidades de masa de una sustancia habrá en un centímetro cúbico (o, si se usan unidades S.I, cuántos kilogramos habrá en un metro cúbico).

Ahora bien, la diferencial de una función “f(x)” se refiere al cambio aproximado que ocurrirá en su valor (Δy , ya que $f(x)=y$), ya sea aumento o disminución, cuando se presente un cambio, ya sea aumento o disminución, en la variable “x” de la función (Δx). Para el cálculo de este valor de cambio aproximado, Δx se denotará como dx y se conocerá como diferencial de “x”, y Δy se denotará como dy y se conocerá como diferencial de “y”; y, por tanto, dy se podrá calcular mediante la fórmula:

$$dy = f'(x)dx \quad \text{Ec. (2)}$$

“La variable dy siempre es dependiente tanto de “x” como dx . Si dx está dada en un valor específico y x es un número particular en el dominio de la función, estos valores determinan el valor numérico de dy ” (Hass *et al.*, 2018).

Todos estos conceptos serán aplicados al estudio de diferentes sustancias con las que, en un punto posterior del trabajo, se utilizaron para formar una mezcla heterogénea, es decir, una combinación de dos o más sustancias diferentes en proporciones variables, en la cual cada componente retiene su identidad química y existen tantas fases como sustancias fueron combinadas (Gooch, 2011).

La densidad de la muestra descrita anteriormente también fue analizada por medio del uso de diferenciales.

El objetivo de este trabajo es pronosticar el comportamiento de diferentes sustancias al entrar en contacto entre sí a temperatura ambiente y bajo condiciones nulas de agitación, a través del uso de la derivada de una función.

Metodología

Se pesaron 50 g de las siguientes sustancias (todas comerciales): aceite de canola,

detergente líquido (para ropa), champú, agua potable y miel de abeja. Las muestras se colocaron en un recipiente plástico sin agitación, con forma de prisma rectangular (área de la base igual a 36 cm^2), en primera instancia de forma individual y posteriormente las cinco al mismo tiempo y en un solo recipiente. El experimento se llevó a cabo a 32°C .

Para poder llegar al planteamiento matemático de la diferencial de densidad en términos de una sola variable se necesitó modificar algunos aspectos de la formula original de la densidad; para ello, fue necesario controlar algunas de las variables del experimento. A continuación, se describen paso a paso las modificaciones que sufrió la fórmula de densidad para llegar a la forma requerida.

Con base en la ecuación (1), y conociendo la masa de la sustancia (50g de cada una), se obtuvo la Ec. (3)

$$\rho = \frac{50 \text{ g}}{v} \quad \text{Ec. (3)}$$

Ahora bien, ya que se desconocía el volumen que ocupaba cada sustancia (el cual varió dependiendo de la naturaleza de esta), fue posible plantear el volumen a partir de la fórmula del prisma rectangular (área de la base por la altura), con lo que se obtuvo la Ec. 4.

$$\rho = \frac{50 \text{ g}}{(36 \text{ cm}^2)h} \quad \text{Ec. (4)}$$

Llegado este punto, se puede notar que si se aísla la parte constante de la ecuación $\frac{50 \text{ g}}{36 \text{ cm}^2}$ se obtiene la presión ejercida individualmente por las distintas sustancias sobre el fondo del recipiente, sin importar su respectiva densidad; esto sucede para todas las sustancias ya que no depende directamente del volumen como tal, sino de la masa y del área de aplicación y, dado que ambas fueron exactamente iguales para todas las mediciones, la altura que cada

líquido alcanzó dentro del recipiente no influyó en este valor.

Finalmente se expresó formalmente la densidad como una función que dependiera de la altura "h".

$$\rho(h) = \frac{50}{36h} \quad \text{Ec. (5)}$$

Es importante tener en cuenta que las unidades que entrega esta función son g/cm^3 porque la parte constante, como se mencionó anteriormente, está expresada en g/cm^2 y esto se multiplica por $1/cm$, entregando las unidades de medición de densidad.

Con esta ecuación se realizaron gráficas que representan la variación de la densidad, teniendo en el eje X la altura del recipiente y en el eje Y la densidad.

Posteriormente, se planteó la derivada de la función (Ec. 6), con la cual es posible calcular la rapidez de cambio de la función evaluada en un punto específico del dominio

$$\rho'(h) = -\frac{25}{18h^2} \quad \text{(Ec. 6)}$$

Teniendo en consideración que h es una variable medida en centímetros, podría considerarse que la función derivada entrega unidades en g/cm^4 pero de esta manera resulta difícil apreciarlo como una razón de cambio, por lo que la forma óptima para

expresar el resultado será en $\frac{g}{cm^3}/cm$; de esta manera, la derivada muestra la tasa de cambio a la cual están sometidos 50 g de sustancia según el nivel de expansión que tengan (a mayor expansión mayor altura).

Resultados y discusión

La densidad en función de la altura

En la Figura 1 se presenta la gráfica de la función (Ec. 5), la cual pertenece al primer cuadrante y que solamente es aplicable a este caso por lo cual no debe tratarse como un comportamiento general de la densidad. En una primera aproximación, podría resultar extraño que una sola gráfica pueda representar la densidad de más de una sustancia, sin embargo, dado que en el experimento se utilizó la misma cantidad de masa de cada reactivo, al igual que el área de la base del reactor, y considerando que los factores ambientales (incluyendo agitación, presión y temperatura) se mantuvieron sin cambios en todo momento; entonces el factor que definió la densidad fue la altura alcanzada, pues según las variaciones esta presentara, serían las variaciones del volumen y, por tanto, de la densidad entre cada sustancia. De esta manera, todas las densidades quedan representadas dentro de la gráfica de la función.

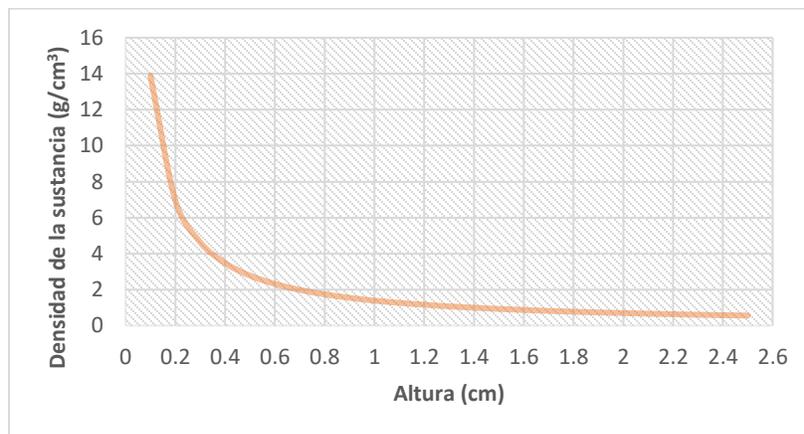


Figura 1. Gráfica de densidades aplicable a 50 g masa contenidos en reactores con forma de prisma, específicamente con área de la base igual a 36 cm^2 .

En la Figura 1 se puede apreciar de forma gráfica una de las características más básicas acerca de este tema: la densidad es inversamente proporcional al volumen de la materia en cuestión. Otra aplicación que pudo tener esta gráfica fue, por ejemplo, medir los cambios de la densidad de 50 g de agua variando la temperatura ya que inicialmente el agua alcanzó cierta altura dentro del recipiente, pero si se le hubiese disminuido la temperatura hasta que se congelara, esta se hubiera expandido y

alcanzando una mayor altura, por lo que su densidad también habría cambiado, haciéndose menor, según el comportamiento observable en la Figura 1.

Análisis del comportamiento de las sustancias respecto al agua

Posterior al planteamiento anterior, se procedió a verter individualmente los 50 g de cada sustancia en el recipiente para obtener la altura que alcanzaba cada una en él, obteniendo los siguientes resultados:

Tabla 1. Altura alcanzada por cada 50 g de sustancia.

Sustancia	Altura (cm)
Aceite de canola	1.7
Detergente para lavar ropa	0.7
Champú	1.3
Agua potable	1.5
Miel de abeja	0.5

De este conjunto de datos se seleccionó a uno totalmente al azar, para que en torno a él se calculen las diferenciales de altura, así como las diferenciales de densidad; en este caso se usó el agua potable. A continuación, se presentan los cálculos realizados para cada una de las otras 4 sustancias restantes con respecto al agua potable.

Primeramente, se consideró la derivada de la función en el punto donde $h = 1.5 \text{ cm}$ que fue la altura alcanzada dentro del recipiente por los 50 g de agua potable.

$$\rho'(h = 1.5) = -\frac{25}{18(1.5)^2} = -\frac{50}{81}$$

Como segundo paso, se calculó el diferencial de altura con respecto a $h = 1.5 \text{ cm}$, para ello, a la altura alcanzada por el agua potable se le restó la altura correspondiente a la sustancia analizada; en este punto, cuando el resultado fue positivo, significó que la altura

alcanzada fue mayor que la del agua potable; por el contrario, un resultado negativo, significó que la altura alcanzada fue menor que la del agua potable.

Finalmente, al calcular el diferencial de densidad en cada caso, se obtuvieron resultados totalmente diferentes, tanto negativos como positivos, en el caso de los resultados negativos, estos significaron que la densidad de la sustancia es menor que la del agua potable; y los diferenciales positivos indicaron que la densidad de la sustancia analizada era mayor que la del agua potable.

De igual manera, es necesario destacar dos aspectos importantes: la primera es que el número obtenido en cada uno de los resultados serán las unidades de g/cm^3 (unidades en las que se midió la densidad) que aumentó o disminuyó la densidad de la sustancia con respecto a la densidad del agua, dependiendo de si el signo fue positivo o negativo; y el segundo aspecto a destacar es que las sustancias, al entrar en contacto, flotarán sobre otras si y solo si su densidad es menor a la de las demás.

A. Detergente líquido (para ropa)

1) Cálculo de la derivada de $\rho(h)$ en términos de la altura alcanzada por el agua potable:

$$\rho'(h = 1.5) = -\frac{25}{18(1.5)^2} = -\frac{50}{81}$$

2) Cálculo de la diferencial de la altura (dh) de la altura alcanzada por el detergente con respecto a la alcanzada por el agua potable:

$$dh = 0.7 - 1.5 = -0.8$$

3) Cálculo de la diferencial de densidad (dρ) a partir de los datos anteriores:

$$\begin{aligned} d\rho &= \rho'(h = 1.5)dh = \left(-\frac{50}{81}\right)(-0.8) \\ &= \frac{40}{81} g/cm^3 \end{aligned}$$

El resultado positivo indica un aumento de densidad al disminuir la altura que alcanzó el fluido.

B. Champú

1) Cálculo de la derivada de $\rho(h)$ en términos de la altura alcanzada por el agua potable:

$$\rho'(h = 1.5) = -\frac{25}{18(1.5)^2} = -\frac{50}{81}$$

2) Cálculo de la diferencial de la altura (dh) de la altura alcanzada por el champú con respecto a la alcanzada por el agua potable:

$$dh = 1.3 - 1.5 = -0.2$$

3) Cálculo de la diferencial de densidad (dρ) a partir de los datos anteriores:

$$\begin{aligned} d\rho &= \rho'(h = 1.5)dh = \left(-\frac{50}{81}\right)(-0.2) \\ &= \frac{10}{81} g/cm^3 \end{aligned}$$

El resultado positivo indica un aumento de densidad al disminuir la altura que alcanzó el fluido.

C. Miel de abeja

1) Cálculo de la derivada de $\rho(h)$ en términos de la altura alcanzada por el agua potable:

$$\rho'(h = 1.5) = -\frac{25}{18(1.5)^2} = -\frac{50}{81}$$

2) Cálculo de la diferencial de la altura (dh) de la altura alcanzada por la miel con respecto a la alcanzada por el agua potable:

$$dh = 0.5 - 1.5 = -1$$

3) Cálculo de la diferencial de densidad (dρ) a partir de los datos anteriores:

$$\begin{aligned} d\rho &= \rho'(h = 1.5)dh = \left(-\frac{50}{81}\right)(-1) \\ &= \frac{50}{81} g/cm^3 \end{aligned}$$

El resultado positivo indica un aumento de densidad al disminuir la altura que alcanzó el fluido.

D. Aceite de canola

1) Cálculo de la derivada de $\rho(h)$ en términos de la altura alcanzada por el agua potable:

$$\rho'(h = 1.5) = -\frac{25}{18(1.5)^2} = -\frac{50}{81}$$

2) Cálculo de la diferencial de la altura (dh) de la altura alcanzada por el aceite con respecto a la alcanzada por el agua potable:

$$dh = 1.7 - 1.5 = 0.2$$

3) Cálculo de la diferencial de densidad (dρ) a partir de los datos anteriores:

$$d\rho = \rho'(h = 1.5)dh = \left(-\frac{50}{81}\right)(0.2)$$

$$= -\frac{10}{81} g/cm^3$$

El resultado negativo indica una disminución de densidad al aumentar la altura que alcanzó el fluido.

Al obtener las diferenciales se pudo notar que el único que presentó un signo negativo fue el del aceite de canola por lo que se puede afirmar que la densidad del agua potable es menor que la de todas las sustancias, excepto que la del aceite de canola y que este es el que presenta la menor densidad de las cinco sustancias analizadas; además, los resultados también indican que la miel es la que presenta la mayor densidad ya que su diferencial fue el que presentó el mayor aumento de unidades g/cm^3 con respecto a la densidad del agua potable.

También, sabiendo que las sustancias de menor densidad flotarán sobre aquellas que presenten mayor densidad, se lograron hacer predicciones acerca de su comportamiento conjunto al entrar en contacto; primeramente, se hizo una predicción de la forma más general posible de la siguiente manera. A grandes rasgos, con los resultados obtenidos de las diferenciales se puede notar que:

Densidad(miel, detergente, champú) > Densidad (agua)

Además: *Densidad (agua) > Densidad (aceite)*

Por lo que:

Densidad(miel, detergente, champú, agua) > Densidad (aceite)

Con ello, se afirmó que la sustancia que flotará por sobre el resto, es el aceite de canola.

El hecho de que cada diferencial haya sido única, es decir, que ninguna se repitió, demuestra que, efectivamente, cada fluido posee una densidad diferente a la de los

otros; y bastaría con ordenar las diferenciales de densidad de menor a mayor para predecir la forma en que se escalonarían las sustancias al colocarlas todas en un mismo recipiente:

1. $-10/81 g/cm^3$ (relación: aceite y agua)
2. Agua (se coloca en esta posición porque la diferencial anterior indica una disminución en la densidad con respecto al agua y la siguiente indica un aumento, por lo que se deduce que la densidad del agua potable es un valor que se encuentra entre el valor de la densidad del aceite y la densidad del champú)
3. $10/81 g/cm^3$ (relación: champú y agua)
4. $40/81 g/cm^3$ (relación: detergente y agua).
5. $50/81 g/cm^3$ (relación: miel y agua).

Mediante el ordenamiento creciente de los diferenciales obtenidos, se puede observar la manera en que las sustancias se acomodarán al colocarse en un mismo recipiente, siendo que la que ocupa la primera posición (el diferencial más pequeño) será la que se coloque en la cima de la torre; así sucesivamente hasta llegar a la quinta posición (el diferencial más grande) que será la sustancia que se quede hasta el fondo del sistema material.

Es importante señalar que las unidades g/cm^3 entre las densidades del agua potable y cada uno de los líquidos siempre será la misma sin importar el tamaño de la muestra, si y solo si se mide bajo las mismas condiciones de temperatura y presión usadas en este trabajo; esto basándose en el hecho de la que densidad es una propiedad intensiva de la materia.

Torre de líquidos

Para demostrar la veracidad o falsedad de las interpretaciones, se llevó a cabo lo que realmente es el experimento de la “Torre de

líquidos”, el cual consistió en verter las 5 sustancias en el recipiente para que todas interactuaran a la misma vez (Figura 2).

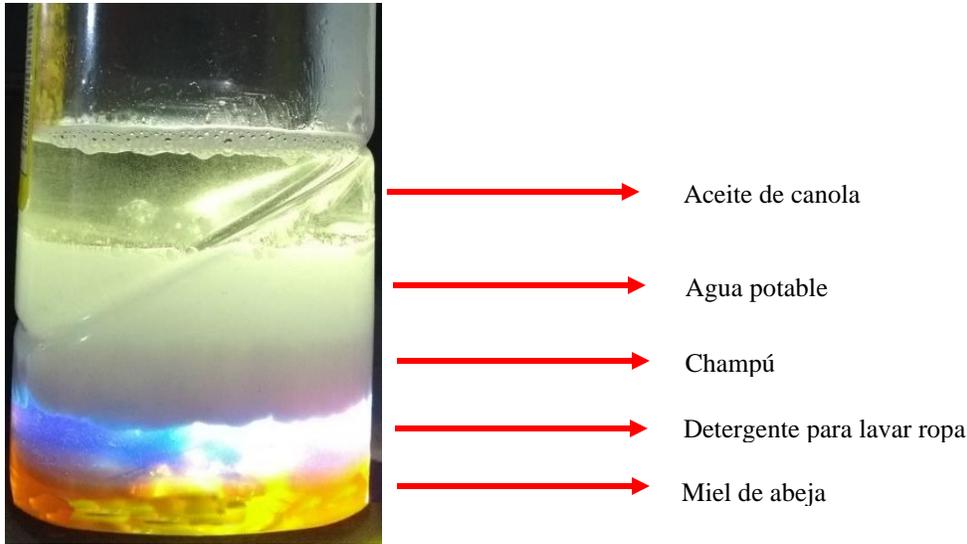


Figura 2. Fotografía del recipiente conteniendo los 5 fluidos, comúnmente llamado “Torre de líquidos”.

Como se puede observar en la Figura 2, los fluidos se escalonaron de la forma en que se predijo con el cálculo de las diferenciales, demostrando, a su vez, que en el sistema están interactuando diferentes densidades y mostrando de manera visual como la misma cantidad de masa puede ocupar un espacio distinto según su densidad; además, sienta bases teóricas que explican el funcionamiento del experimento.

Con lo anterior, también se demuestra que con el uso de esta herramienta del cálculo se puede predecir parte del comportamiento (ya que se excluyen las reacciones químicas que pudiera llegar a ocasionar el contacto de dos o más reactivos) que estas u otras sustancias pueden adoptar al interactuar con otras, basándose en el análisis independiente de cada una.

De igual forma, si ya se tuvieran los líquidos en esta disposición desde un inicio, se puede

explicar porque algunos quedan abajo o sobre de otros, aplicando las mismas herramientas. Para demostrar esto, se usó como ejemplo la situación del detergente líquido, que quedó entre la miel y el champú:

1) La altura alcanzada por el detergente fue de 0.7cm por lo que:

$$\rho'(h = 0.7) = -\frac{25}{18(0.7)^2} = -\frac{200}{63}$$

2) Las diferenciales de altura (dh) en relación con la miel y el champú:

Miel y detergente

$$dh = 0.5 - 0.7 = -0.2$$

Champú y detergente

$$dh = 1.3 - 0.7 = 0.6$$

3) Por lo tanto sus respectivas diferenciales de densidad (dp) son:

Miel y detergente

$$\begin{aligned} dp &= \rho'(h = 0.7)dh = \left(-\frac{200}{63}\right)(-0.2) \\ &= \frac{40}{63} g/cm^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Champú y detergente} \\ d\rho = \rho'(h = 0.7)dh = \left(-\frac{200}{63}\right)(0.6) \\ = -\frac{40}{21}g/cm^3 \end{aligned}$$

Como se puede observar, con esto se demuestra que del detergente a la miel hay un aumento de densidad, mientras que del detergente al champú hay una disminución de densidad; y con ello se explica por qué el detergente quedó sobre la miel, pero debajo del champú dentro del sistema material.

Conclusiones

Posterior al trabajo realizado, se concluyó que en una mezcla heterogénea formada por masas iguales de diversas sustancias, la variación de las densidades entre cada una de las fases puede ser explicada a partir de las diferentes alturas alcanzadas, siendo que, mediante el uso del cálculo de las diferenciales de densidad, se puede obtener la diferencia de unidades g/cm^3 (k/m^3 en unidades S.I o cualquier otra unidad de masa sobre volumen) que hay entre cada una, siempre teniendo como punto de comparación a una de las sustancias en cuestión. De igual manera, las diferenciales pueden usarse para el análisis de estas variaciones en reactores separados, evitando

reacciones inesperadas que pudieran afectar el estudio; y con los resultados obtenidos, pronosticar el comportamiento de dichas sustancias al entrar en contacto.

A su vez, la aplicación de esta herramienta puede traducir a valores numéricos aquello que solo es observable en la realización del experimento, brindando una explicación de lo que ocurre en este fenómeno físico y sentando bases teóricas para su comprensión. Aunado a esto, se demuestra, con el uso de diferenciales, que la densidad es inversamente proporcional al volumen pues literalmente se aprecia que al aumentar la altura alcanzada por el fluido y por lo tanto también su volumen, disminuye el valor las diferenciales de densidad, lo cual indica que la densidad es menor a la de la sustancia utilizada como punto de referencia.

Finalmente, se puede inferir que, mediante un trabajo similar al realizado con las derivadas y diferenciales, se podrían realizar estudios posteriores cuyo enfoque sea el análisis del cambio en la densidad de una sola sustancia al modificar sus condiciones ambientales, desde luego, hallando la relación que tenga la densidad con las demás variables ambientales a estudiar.

Referencias

- Gooch, J. W. (2011). *Encyclopedic Dictionary of Polymers*. Estados Unidos: Springer
- Hass, J., Heil, C. y Weir, M. D. (2018). *Thomas' Calculus*. Estados Unidos: Pearson
- Hein, M. y Arena, S. (1997). *Fundamentos de química*. México: International Thomson Editores.
- Petrucci, R., Herring, F., Madura, J. y Bissonnette, C. (2011). *Química general (10 ed)*. Madrid, España: PEARSON.