

Modelación del comportamiento de la temperatura de la taza de café

Pérez Kú Andrea Noemí¹, Cem Húh Naydelin Saraí¹, Castilla Gracida Hugo Emmanuel¹, Itzá Balam Reymundo^{2,*}

¹Facultad de Ingeniería Química, Universidad Autónoma de Yucatán Inn, Perif. de Mérida Lic. Manuel Berzunza 13615, Chuburná Hidalgo, 97203 Mérida, Yuc.

²Centro de Investigación en Matemáticas A. C., CIMAT Unidad Mérida, México
Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación, Secihti, México

Fecha de recepción: 18 de octubre de 2024 — Fecha de aceptación: 3 de junio de 2025

Resumen

Las ecuaciones diferenciales son herramientas clave en la ingeniería para modelar fenómenos como la transferencia de calor. Este trabajo utiliza la Ley de Enfriamiento de Newton para describir el enfriamiento de una taza de café, comparando los resultados teóricos con datos experimentales. El modelo establece que la rapidez de cambio de la temperatura es proporcional a la diferencia entre la temperatura del fluido y su entorno. Se realizaron dos experimentos midiendo la temperatura del café utilizando diferentes tipos de tazas, registrando las variaciones durante 15 minutos. Los resultados indican que el modelo de Newton describe de manera adecuada el enfriamiento del café en distintos materiales, especialmente en intervalos de tiempo cortos.

Palabras Clave: Ecuación diferencial, Ley de Enfriamiento de Newton, Experimentos, Modelo Matemático, Temperatura

Modeling the temperature behavior of the coffee cup

Abstract

Differential equations are key tools in engineering for modeling phenomena such as heat transfer. This work uses Newton's Law of Cooling to describe the cooling of a cup of coffee, comparing theoretical results with experimental data. The model states that the rate of change of temperature is proportional to the difference between the temperature of the fluid and its surroundings. Two experiments were conducted, measuring the temperature of the coffee using different types of cups, recording variations over 15 minutes. The results indicate that Newton's model adequately describes the cooling of coffee in different materials, especially over short time intervals.

Keywords: Differential equation, Newton's Law of Cooling, Experimentation, Mathematical model, Temperature

1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales se utilizan ampliamente en la ingeniería para modelar fenómenos reales, describir su comportamiento y permitir hacer estimaciones considerando condiciones iniciales y la evolución de variables [1]. Uno de estos problemas ampliamente estudiados es la transferencia de calor. Para describir este fenómeno, se utiliza comúnmente un modelo basado en sistemas de ecuaciones diferenciales parciales, donde el

calor, que en este caso es energía, se estudia mediante efectos difusivos, dispersivos y convectivos, y su comportamiento dependerá del medio en el que ocurre el fenómeno [2]. En ocasiones no se requiere la descripción completa o detallada de un fenómeno, sino que solo se busca describir la tendencia principal, en este caso de la temperatura, y por lo tanto el modelo seleccionado suele ser más simple, reduciéndose en muchos casos a ecuaciones diferenciales ordinarias. Existen diferentes modelos

*a22215806@alumnos.uady.mx

para describir la temperatura de un cuerpo o un fluido, como la Ley de Fourier (modelo no lineal) [3] y la Ley de Newton (modelo lineal) [4]. Entre estos ejemplos, el más común, sencillo de estudiar y aplicar es la Ley de Enfriamiento de Newton, la cual establece que la rapidez de cambio de la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y su entorno, y se expresa como una ecuación diferencial [4]:

$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_a), \quad (1)$$

$$T(0) = T_0, \quad (2)$$

donde K es la razón de cambio relacionada con el material, T es la temperatura del material, T_0 es la temperatura inicial del material, T_a hace referencia a la temperatura ambiente y t representa el tiempo. Es importante señalar que el parámetro K encapsula la información del material y, en cierta medida, las simplificaciones realizadas para formular el problema en (1) y (2).

La simplicidad de este modelo no impide obtener resultados que describan de manera precisa el comportamiento general de la temperatura de un cuerpo o fluido. Se ha investigado, por ejemplo, el enfriamiento del agua tras haberla llevado al punto de ebullición [5]. Otros experimentos incluyen sustancias más complejas, como el mercurio [6]. En la industria, este modelo es de particular interés para el enfriamiento de materiales como el mármol, por ejemplo, el tipo Café Tabaco [7]. Además, en algunos casos, también encuentra aplicaciones en la industria alimentaria [8].

Este trabajo tiene como objetivo comprobar la precisión del modelo de la Ley de Enfriamiento de Newton, comparando sus estimaciones con datos experimentales del enfriamiento de una taza de café en un intervalo de tiempo corto. No solo se realiza una comparación directa con los datos experimentales, sino también con el promedio de dichos datos. Los experimentos se llevarán a cabo en dos situaciones: en una, se mide la temperatura del café en una taza tradicional de cerámica, y en la otra, se utiliza una taza de cartón comúnmente encontrada en tiendas de conveniencia. La intención es mostrar que el valor de K refleja esta información y que el modelo es capaz de estimar correctamente las temperaturas en ambos casos. El artículo está organizado de la siguiente manera: en la Sección 2 se describe el experimento del enfriamiento de una taza de café y se resuelve la ecuación diferencial del modelo basado en la Ley de Enfriamiento de Newton. En la Sección 3, se comparan los datos experimentales con el modelo teórico y se describen los resultados. Finalmente, en la Sección 4 se evalúa si el modelo de Newton estima con precisión el enfriamiento del café en las situaciones presentadas.

2. Metodología

En esta sección se detalla la metodología para evaluar la precisión del modelo de la Ley de Enfriamiento de Newton mediante la comparación con datos experimentales. Primero, observamos que la ecuación (1) es una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden, la cual puede resolverse mediante diferentes técnicas. En este caso, se empleó el método de separación de variables, cuya solución general es:

$$T(t) = Ce^{K\frac{t}{T_1}} + T_a,$$

donde C y K son constantes aún por determinar. El valor de C se obtiene utilizando la condición inicial (2), con lo cual se tiene:

$$T(t) = (T_0 - T_a)e^{K\frac{t}{T_1}} + T_a.$$

Para determinar el valor de K , es necesario contar con un dato adicional, por ejemplo, la temperatura T_1 medida en el instante t_1 . Con esta información, se obtiene una expresión explícita que modela la evolución temporal de la temperatura del café, de acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton.

$$T(t) = (T_0 - T_a)e^{K\frac{t}{T_1}} + T_a, \quad (3)$$

donde

$$K = \ln \left(\frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a} \right).$$

Es importante señalar que K puede estimarse si se conoce la temperatura inicial del café (T_0), la temperatura ambiental (T_a) y una medición adicional de temperatura (T_1) tomada en un instante posterior t_1 , ver [9]. Esta relación permite calcular K sin necesidad de recurrir a técnicas de ajuste más complejas, lo que la hace especialmente útil en experimentos sencillos de enfriamiento.

Para la parte experimental, se decidió llevar a cabo el estudio en dos etapas, con el objetivo principal de validar la efectividad del modelo de la ley de enfriamiento de Newton, y no para comparar directamente los entornos experimentales. En la primera etapa, el experimento se realizó en un entorno controlado de laboratorio, utilizando una taza de cerámica. Dado que el procedimiento fue sencillo, estable y replicable, no se consideró necesario repetir el experimento múltiples veces en esta etapa. En la segunda etapa, se amplió el alcance del estudio al considerar un escenario más realista, pero procurando tener cuidado con la recolección de las medidas. En esta etapa se incorpora un elemento adicional: una taza de cartón, con el fin de analizar cómo el material del recipiente puede influir en la velocidad de enfriamiento del café. Además, se aumentó el número de mediciones

para obtener una visión más completa y robusta de la dinámica del enfriamiento.

En todos los casos, el experimento consistió en medir la temperatura de una taza de café caliente cada minuto durante 15 minutos. Esta metodología, aplicada de forma sistemática en ambas etapas, permite obtener resultados consistentes adecuados para validar el modelo matemático propuesto.

Experimento primera etapa. En esta etapa, se utilizó un termómetro Lo-Tox, un cronómetro, un soporte universal, una pinza de tres dedos, cuaderno y lápiz. Los datos obtenidos se presentan en la Tabla 1. La temperatura ambiente promedio del laboratorio fue de $T_a = 26^\circ\text{C}$. Según la tabla, la temperatura inicial es de $T_0 = 65^\circ\text{C}$.

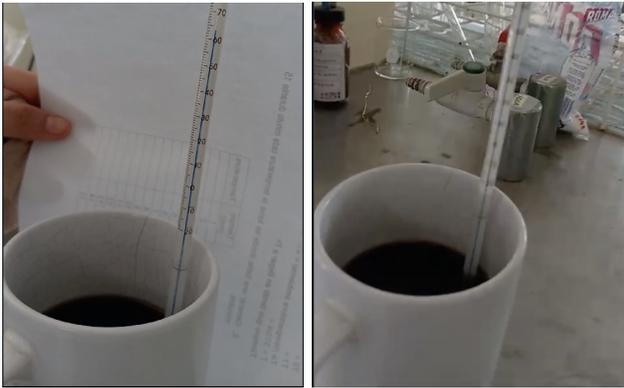


Figura 1: Fotos tomadas en laboratorio, que corresponde al experimento de la primera etapa.

Tabla 1: Registro de la temperatura en $^\circ\text{C}$ de una taza de café durante un período de 15 minutos.

t (min)	T ($^\circ\text{C}$)	t (min)	T ($^\circ\text{C}$)
0	65.0	8	54.5
1	62.0	9	54.0
2	61.0	10	53.5
3	59.0	11	52.5
4	58.0	12	51.6
5	57.0	13	50.4
6	56.0	14	49.8
7	55.0	15	48.0

Experimento segunda etapa. En esta segunda etapa, se utilizó un termómetro digital de cocina (LCD), un celular, cuaderno y lápiz. Los datos obtenidos se presentan en la Tabla 2. La temperatura ambiente promedio de la habitación fue de $T_a = 29^\circ\text{C}$. Para hacer el experimento más realista, se seleccionó una temperatura inicial de $T_0 = 55^\circ\text{C}$. Esta temperatura fue elegida considerando que temperaturas superiores a 47°C pueden causar

lesiones en la boca, y que muchos sitios especializados recomiendan que la temperatura ideal para el consumo de café es cercana a 60°C , sin superar este valor. George Howell, de George Howell Coffee, quien ha estado seleccionando y catando café de especialidad desde los años 70, prefiere beber su café a una temperatura cercana a los 54°C [10]. Con el fin de minimizar las posibles fluctuaciones en las mediciones del termómetro LCD, no se analizará cada una de las temperaturas T_i de forma individual, sino que se tomará el promedio de las temperaturas correspondientes a cada tipo de taza. Para ello, se realizaron tres mediciones por caso durante un periodo de 15 minutos, observando que no había una variación significativa entre las muestras. Esta estrategia permite obtener un comportamiento más representativo y confiable del proceso de enfriamiento del café en un entorno no controlado.

Así, la temperatura correspondiente a la taza de cerámica será $T_{ce} = (T_1 + T_2 + T_3)/3$, y la temperatura de la taza de cartón será $T_{ca} = (T_4 + T_5 + T_6)/3$, donde T_i corresponde a las columnas de la Tabla 2.

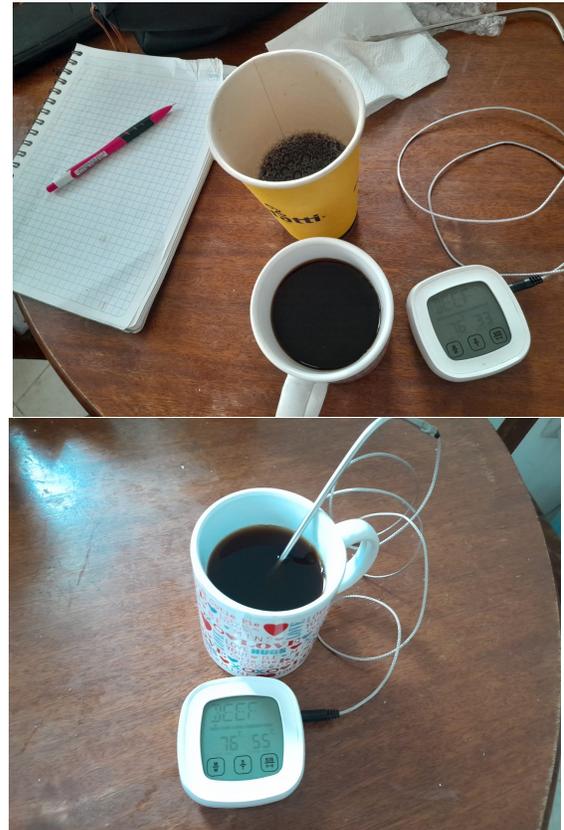


Figura 2: Fotos de los instrumentos y del experimento de la segunda etapa.

Tabla 2: Registro de la temperatura del café °C en tazas de diferente material en un período de 15 minutos.

t (min)	taza cerámica			taza cartón		
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
0	55	55	55	55	55	55
1	54	54	54	54	54	54
2	53	54	53	53	53	54
3	52	53	53	52	52	53
4	51	52	52	51	51	52
5	50	51	51	50	50	52
6	50	51	50	49	49	51
7	49	50	49	48	48	50
8	48	49	49	47	48	49
9	48	49	48	46	47	49
10	47	48	48	46	46	48
11	47	47	47	45	45	48
12	46	47	47	44	45	47
13	45	46	46	44	44	47
14	45	46	46	43	44	46
15	44	45	46	43	43	46

$$T(t) = 36e^{-0.0286t} + 26.$$

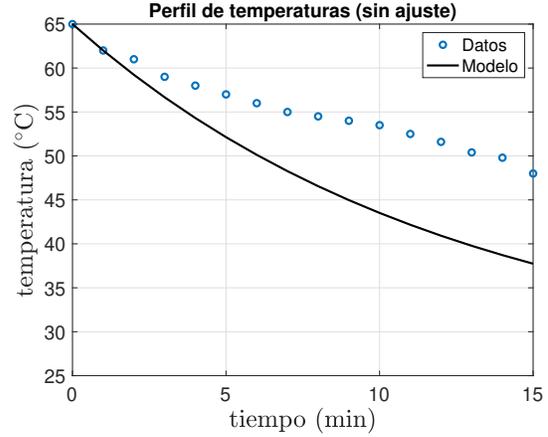


Figura 3: Comparación entre los datos del experimento 1 y el modelo.

3. Resultados y discusión

Para realizar la comparación entre los datos experimentales y el modelo, es necesario determinar los valores desconocidos de T_0 , T_1 y T_a en la ecuación (3). Estos valores dependerán de si corresponde al primer experimento o al segundo grupo de experimentos, y también se utilizarán los datos proporcionados en la Tabla 1 y la Tabla 2 como referencia. Por ejemplo, el modelo para el primer experimento se determina cuando $T_0 = 65$, $T_1 = 62$ y $T_a = 26$, y este caso se obtiene que:

$$T(t) = 39e^{\ln(\frac{12}{13})t} + 26.$$

Este procedimiento se repite cada vez que es necesario ajustar un modelo a un conjunto de datos, utilizando la ecuación (3). De esta manera, se puede obtener una aproximación adecuada para describir el comportamiento de la temperatura, asegurando que el modelo teórico sea el correcto para los datos experimentales correspondientes.

La Figura 3 presenta la evolución de la temperatura del café durante los primeros 15 minutos, obtenida tanto con el modelo teórico de la Ley de Enfriamiento de Newton como con los datos experimentales registrados en el laboratorio. Se observa una diferencia significativa entre los resultados teóricos y experimentales, especialmente en los primeros minutos. Esta discrepancia puede deberse al hecho de que no se esperó lo suficiente para que la temperatura del café se distribuyera homogéneamente en la taza antes de realizar la primera medición. Esto sugiere que la taza aún no había absorbido completamente el calor del café. Tras corregir y recalcular, se obtuvo una nueva función que representa mejor el comportamiento de la temperatura del café, la cual es:

La Figura 4 muestra el perfil de temperaturas del café durante los primeros 14 minutos, una vez que se eliminó el primer dato, y se determinó el modelo teórico correspondiente para el nuevo conjunto de datos. Se ha mantenido también la Figura 3, en lugar de solo mostrar la Figura 4 corregida, con el propósito de evidenciar cómo un error de medición puede llevar a la formulación de un modelo incorrecto.

La Figura 5 muestra los datos de los tres experimentos T_i , su promedio T_{ce} y el modelo que proviene de la Ley de Enfriamiento de Newton para la taza de cerámica dado por (3), donde $T_1 = 54$ y $K = -0.0392$. Como se puede observar el modelo estima correctamente la temperatura promedio sobre todo en los primeros minutos.

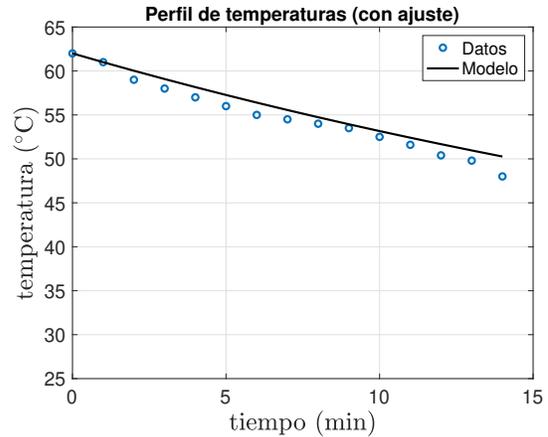


Figura 4: Comparación entre los datos ajustados del experimento 1 y el modelo.

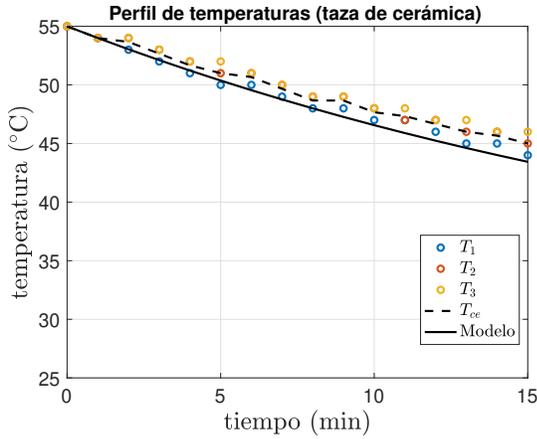


Figura 5: Comparación entre los datos del experimento 1 y el modelo.

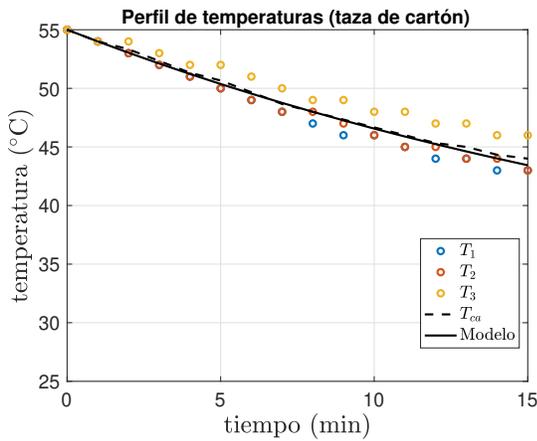


Figura 6: Comparación entre los datos del experimento 1 y el modelo.

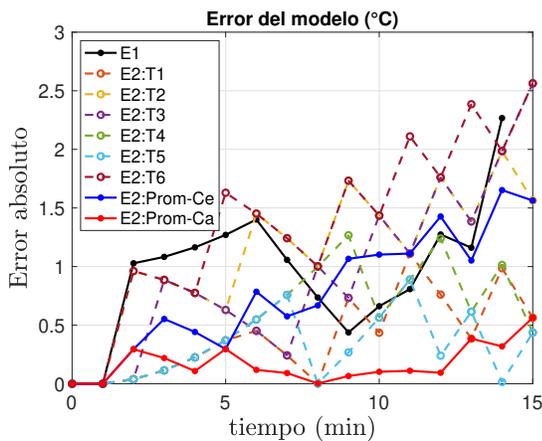


Figura 7: Los errores absolutos entre los experimentos y sus respectivos modelos no superan los 3 grados durante los primeros 15 minutos.

La Figura 6 muestra los datos de los tres experimentos T_i , su promedio T_{ca} y el modelo que proviene de la

Ley de Enfriamiento de Newton para la taza de cartón dado por (3), donde $T_1 = 54$ y $K = -0.0392$. Al igual que en el caso de la taza de cerámica, el modelo estima correctamente el promedio de los datos.

La Figura 7 muestra los errores absolutos entre las mediciones y sus respectivos modelos. Se incluyen los resultados de todos los experimentos, tanto de la etapa 1 (identificados como E1) como de la etapa 2 (E2), incluyendo las temperaturas promedio T_{ce} y T_{ca} . Se observa que los errores no superan los 3 grados, incluso en intervalos de tiempo prolongados. Además, se aprecia que, conforme transcurre el tiempo, el modelo tiende a desviarse de los datos reales, lo cual concuerda con el comportamiento esperado para este tipo de modelo.

Los errores correspondientes a T_{ce} y T_{ca} capturan adecuadamente la tendencia de sus respectivas mediciones T_i . Una forma de interpretar estos errores es mediante el uso de porcentajes. En la Figura 8 se presentan los errores relativos correspondientes al experimento realizado en laboratorio (E1), así como los relativos a T_{ce} y T_{ca} . Se observa que el error relativo máximo es inferior al 5%, lo que indica una precisión superior al 95%, un valor bastante aceptable para un modelo simple. Además, los errores máximos se concentran alrededor del minuto 15, mientras que durante los primeros 10 minutos se mantienen por debajo del 3%. En particular, las mediciones correspondientes a la taza de cartón presentan errores menores al 1% en ese mismo intervalo (10 muestras), en concordancia con los resultados reportados en [7], aunque en ese caso se utilizaron intervalos de 20 minutos (10 muestras) y se estudió la temperatura en otro material.

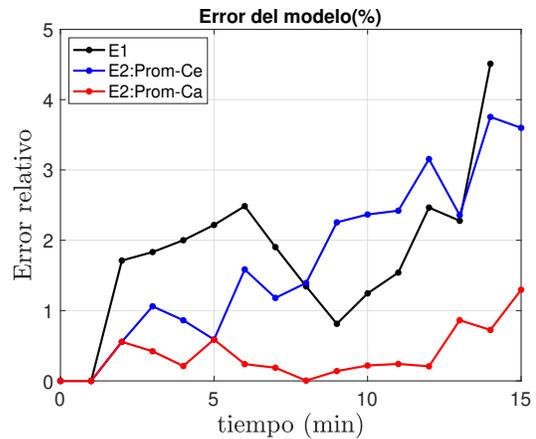


Figura 8: Los errores relativos entre los experimentos y sus respectivos modelos son menores a 5% durante los primeros 15 minutos.

A partir de los datos presentados, se puede observar que, independientemente del material del vaso o la taza, el valor de K efectivamente captura esta información, tal como era de esperarse. Esto confirma que el modelo es capaz de integrar las propiedades térmicas del contenedor, reflejando de manera adecuada su influencia en el proceso de enfriamiento.

4. Conclusiones

Este trabajo diseñó un experimento para validar de forma sencilla la Ley de Enfriamiento de Newton, enfocándose en el enfriamiento de una taza de café en un

periodo corto. Los resultados confirmaron que el modelo es preciso para estimar la disminución de temperatura cuando los datos se recopilan de manera adecuada y el intervalo de tiempo es breve. Para mejorar este estudio en el futuro, se podría considerar la inclusión de experimentos en los que la temperatura sea medida de forma automática utilizando hardware y software como Arduino, lo que permitiría obtener datos más precisos y confiables.

Agradecimientos

Agradecemos a la Facultad de Ingeniería Química por el acceso a sus instalaciones, esencial para el desarrollo de este proyecto.

Referencias

- [1] Spiegel, M.R. (1958). Ecuaciones Diferenciales Aplicadas (3era Edición, pp. 71). Prentice-Hall Hispanoamericana.
- [2] Reddy, J. N., & Gartling, D. K. (2010). The finite element method in heat transfer and fluid dynamics. CRC press.
- [3] Alvear Salazar F. I. (2018). Estudio de la Ley de Fourier de Conducción de Calor en materiales viscoelásticos. Tesis de maestría, Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Cuernavaca, México.
- [4] Zill D.G. y Cullen M.R. (2009). Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera (7^a ed. pp. 21). Cengage Learning.
- [5] Plaza, L. (2018). Modelación matemática por ecuaciones diferenciales. Caso: ley de enfriamiento de Newton. En S. Valbuena, L. Vargas, J. Berrío, J.(Eds.), Encuentro de Investigación en Educación Matemática, 501-507.
- [6] Ojeda-Misses, M. A. (2022). Modelado y control de temperatura para una clase de sistema derivado de la ley de enfriamiento de Newton. Padi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI, 10(Especial4), 160-167.
- [7] Morales Tassari, Adolfo M. (2019). Modelo de enfriamiento en el mármol tipo café tabaco mediante una prueba de enfriamiento de Newton. Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica, 35-44.
- [8] Pérez, & Sosa. (2013). Mecanismos de transferencia de calor que ocurren en tratamientos térmicos de alimentos. Temas selectos de Ingeniería de Alimentos 7 -1, 37-47.
- [9] Moreira, P., & Ortega, O. (2025). Ley de enfriamiento de Newton con temperatura variable. Revista Mexicana de Física E, Vol. 22, pp 1- 6. doi: 10.31349/RevMexFis.22.010218.
- [10] Coffee Detective. (n.d.). What is the correct temperature for serving coffee? Coffee Detective. Recuperado el 17 de octubre de 2024, de <https://www.coffeedetective.com/what-is-the-correct-temperature-for-serving-coffee.html>