

Cálculo de fuerzas electrostáticas entre objetos volumétricos regulares mediante integración Montecarlo

Irma Martín, Gabriela Rivadeneyra, Jorge Medina-García y Cesar Cab

Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Yucatán. Avenida de Industrias No. Contaminantes y Periférico Norte s/n. Mérida, Yucatán, México.

Fecha de recepción: 14 de octubre de 2025 - Fecha de aceptación: 23 de octubre de 2025

Resumen

En este trabajo presentamos un estudio numérico de la fuerza electrostática entre pares de cuerpos con carga eléctrica uniforme, de volumen y forma regular, específicamente, esfera, cono y cilindro circular con orientaciones arbitrarias. Con el fin de optimizar el cálculo numérico, implementamos un modelo de integración Montecarlo para estimar la fuerza entre distribuciones continuas de carga y la comparamos con el modelo de cargas puntuales situadas en los centroides. El diseño experimental varía (*i*) la distancia entre los centroides en un rango amplio (0 a 10 m) y (*ii*) la razón de volúmenes $\gamma = V_2/V_1$ (0.25 a 10), contemplando la carga total igual ($Q_2 = Q_1$). Reportamos el módulo de la fuerza, la razón de la fuerza a la fuerza puntual, el error porcentual del ángulo entre las fuerzas y el error vectorial relativo frente a la referencia de cargas puntuales. Se discuten los resultados para 4 parejas de objetos, esfera-esfera, esfera-cilindro, esfera-cono y cilindro-cono. Se obtienen errores vectoriales relativos cercanos al 10% para distancias cercanas, en pares de objetos que contienen al cilindro y al cono. La pareja esfera-esfera reporta resultados prácticamente idénticos comparados con el caso de cargas puntuales. Se discuten los resultados mediante un enfoque multipolar.

Palabras claves: Fuerza electrostática, Distribución de carga, Integración Montecarlo, Cuerpos cargados (o Geometrías regulares), Modelo de cargas puntuales, Análisis multipolar

*irma.martin@correo.uady.mx

Calculation of electrostatic forces between regular volumetric objects using Montecarlo integration

Abstract

In this work we present a numerical study of the electrostatic force between pairs of bodies with uniform electric charge, of regular volume and shape, specifically sphere, cone and circular cylinder with arbitrary orientations. In order to optimize the numerical calculation, we implement a Monte Carlo integration model to estimate the force between continuous charge distributions and compare it with the model of point charges located at the centroids. The experimental design varies (*i*) the distance between the centroids in a wide range (0 to 10 m) and (*ii*) the volume ratio $\gamma = V_2/V_1$ (0.25 to 10), considering the total charge equal ($Q_2 = Q_1$). We report the force magnitude, the ratio of the force to the point force, the percentage error of the angle between the forces and the relative vector error against the point charges reference. Results are discussed for four object pairs: sphere-sphere, sphere-cylinder, sphere-cone, and cylinder-cone. Relative vector errors approaching 10% are obtained for close distances for object pairs containing the cylinder and the cone. The sphere–sphere pair reports practically identical results compared to the case of point charges. The results are discussed using a multipole approach.

Keywords: Electrostatic force, Charge distribution, Monte Carlo integration, Charged bodies (or regular geometries), Point charge model, Multipole analysis

1. Introducción

Es común en la literatura y en el aula el estudio de cargas puntuales en electromagnetismo, pero muchos problemas reales involucran cuerpos de tamaño finito con distribuciones uniformes o complejas de carga. Desde los experimentos de Coulomb en el siglo XVIII, la ley de la inversa del cuadrado ha sido empleada como modelo universal para describir la fuerza entre cargas puntuales (Griffiths, 2023). Sin embargo, la mayoría de los sistemas de interés físico, químico o tecnológico están compuestos por objetos cargados no puntuales, tales como esferas conductoras, discos, varillas o estructuras moleculares extendidas. En estos casos, la distribución espacial de la carga, geometría, orientación y proximidad relativa, así como los efectos de inducción y polarización, introducen desviaciones sistemáticas respecto a la ley de Coulomb idealizada (Lekner, 2012; Banerjee et al., 2021; Ciftja, 2019).

La ley de Coulomb ha sido objeto de pruebas experimentales de gran precisión, desde las investigaciones clásicas de Plimpton y Lawton (1936) hasta los experimentos más recientes que imponen límites estrictos a posibles correcciones derivadas de una masa finita del fotón o de nuevas interacciones fundamentales (Williams et al., 1971; Fulcher, 1986; Tu et al., 2004; Goldhaber & Nieto, 2010). Estos estudios, tanto teóricos como experimentales, permiten situar el análisis de objetos cargados extendidos en un marco más amplio que conecta la electrodinámica clásica con las fronteras de la física fundamental.

Modelar fuerzas electrostáticas entre distribuciones extendidas es un problema clásico que admite múltiples aproximaciones, dependiendo de los sistemas a los cuales se aplica la metodología. Algunas de estas aproximaciones son:

- **Expansiones multipolares:** en el régimen lejano, una distribución de

carga puede representarse por momentos (monopolo, dipolo, cuadrupolo...). La validez mejora con r grande comparado con la escala geométrica característica; cerca, puede degradarse y requerir altos órdenes o esquemas alternativos. Las extensiones actuales incorporan momentos de mayor orden o híbridos físico-multipolares en química y física computacional (Vuong et al., 2023).

- **Métodos numéricos de gran escala** para interacciones de largo alcance (muchas cargas): *Ewald*, *no-Ewald*, y variantes rápidas/multinivel que reducen costo computacional manteniendo precisión. Aunque nuestra simulación es de dos cuerpos, estos avances contextualizan la literatura contemporánea sobre electrostática numérica eficiente (Fukuda & Nakamura, 2023).
- **Cuerpos no esféricos y proximidad extrema:** el régimen casi en contacto es particularmente delicado por la singularidad $1/r$ y la sensibilidad a la forma, con estudios analíticos y numéricos para conductores o dieléctricos (esferas, no esferas). Aunque aquí usamos medios homogéneos y cargas fijas en volumen, estos resultados subrayan la complejidad geométrica de campo cercano (Khair, 2013).
- **Cargas continuas:** energía/fuerza de autointeracción: trabajos recientes sobre autoenergía de sólidos regulares y tratamientos matemáticos de integración *double-folding*, muestran interés renovado por integrales de Coulomb precisas en cuerpos finitos (Batle et al., 2017).

El objetivo de este trabajo es cuantificar las desviaciones de la fuerza entre pares de objetos

considerando tres posibilidades de sólidos regulares cargados eléctricamente, la esfera, el cono y el cilindro circular. Las fuerzas se calculan mediante una integración optimizada empleando el método Montecarlo, con el fin de contrastar las fuerzas obtenidas con la fuerza entre cargas puntuales situadas en los centroides de cada objeto, reportando métricas vectoriales y escalares del error. En el estudio, se varían las distancias entre los centroides de los objetos, desde la distancia más corta, cuando los objetos se tocan en un punto sin superponerse, hasta distancias cercanas a 10 metros, también se realizaron cálculos para distintas razones de los volúmenes de los objetos ($\gamma = V_2/V_1$). Para el cono y el cilindro circular se ha utilizado una razón altura/radio de 2.0 para todos los cálculos.

Desde una óptica educativa, se pretende mostrar cuantitativamente las diferencias en las fuerzas entre objetos que tienen un volumen equiparable a distancias del orden de sus dimensiones, respecto a si fueran puntuales. En los cursos introductorios de licenciatura de Electricidad y Magnetismo, solo se tratan objetos cargados puntuales y extendidos como la línea recta cargada, el anillo circular de carga y el plano, debido a la relativa simplicidad matemática para resolverlos. Tomando en cuenta esa perspectiva, el estudio sirve para: (i) mostrar cómo emergen los efectos de forma/tamaño; (ii) identificar el umbral de distancia a partir del cual el modelo puntual es adecuado.

2. Metodología

Se programó un script Python para realizar los cálculos. La implementación se basa en integración Montecarlo con muestreo uniforme del volumen, paralelización por procesos y métricas de comparación con un modelo de cargas puntuales ubicadas en los centroides. Se pueden elegir una gran variedad de objetos geométricos regulares para llevar a cabo los

cálculos, siendo algunos en cuanto geometría y orientación más simétricos que otros, para los cuales se esperarían resultados más parecidos a las esferas cargadas y objetos puntuales. Por simplicidad, se eligieron, la esfera, el cono y el cilindro, ambos de base circular, considerando la carga eléctrica distribuida de manera uniforme en el volumen de cada cuerpo. Los

objetos se representan en los cálculos separados por el eje imaginario que pasa a través de los centros geométricos, con orientaciones “de pie” para el cilindro y el cono, manteniendo sus bases sobre el plano xy . Las fórmulas de volumen para cada objeto son:

$$V_{cil} = \pi R_{cil}^2 H_{cil}, \quad V_{cil} = \frac{\pi R_{cono}^2 H_{cono}}{3}, \quad V_{tetra} = \frac{a^3}{6\sqrt{2}}$$

Se variaron las distancias entre centroides, desde la posición más cercana, cuando apenas se tocan sin superponerse e incrementando la distancia mínima en 0.25, 0.75, 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2, 2.25, 2.5, 2.75, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0, 5.5, 6.0, 7.0, 8.0, 9.0 y 10.0 unidades, para

llegar a una distancia total (d_{total}). Todas las medidas de distancia se encuentran en metros. Para cada distancia total de separación, también se varió la razón de los volúmenes de los objetos ($\gamma = V_2/V_1$).

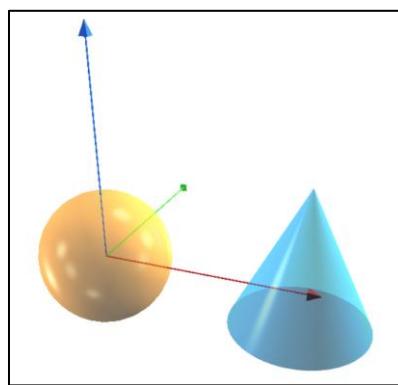


Figura 1. Representación tridimensional del sistema esfera-cono. Los objetos están separados una distancia entre sus centros geométricos.

Los valores usados para γ son: 0.25, 0.5, 0.75, 1.0, 1.25, 1.5, 1.75, 2.0, 2.25, 2.5, 2.75, 3.0, 3.25, 3.5, 3.75, 4.0, 4.25, 4.5, 4.75, 5.0, 5.5, 6.0, 6.5, 7.0, 7.5, 8.0, 9.0 y 10.0. En cuanto a la carga eléctrica, se mantuvo la carga total igual en ambos objetos para las distintas razones de volumen (densidades de carga diferentes para razones de volumen distintas a 1). El cálculo se realizó para los siguientes pares de objetos:

esfera-esfera, esfera-cilindro, esfera-cono y cono-cilindro. Como dimensiones iniciales se definió 0.5 m como el radio de la esfera, 0.5 m para el radio de las bases del cono y el cilindro, y una razón altura/radio de 2 para ambos objetos. La carga empleada para todos los objetos es $+1 \times 10^{-3}$ C.

Integración Montecarlo

La interacción entre dos distribuciones de carga continua se modela mediante la ley de

$$\mathbf{F} = k \iint_{V_1 V_2} \frac{\rho_1 \rho_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3} dV_1 dV_2 ,$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} .$$

Con en valor de $\epsilon_0 = 8.854\ 187\ 8128 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$. (National Institute of Standards and Technology, 2018). La integral doble se aproxima por el método de Montecarlo con N

$$\hat{\mathbf{F}} = k Q_1 Q_2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{r}_{2,i} - \mathbf{r}_{1,i}}{\|\mathbf{r}_{2,i} - \mathbf{r}_{1,i}\|^3} .$$

Se realizaron los cálculos con $N = 20,000,000$, para garantizar la precisión del cálculo de la fuerza. Aún con ese tamaño muestral, el método demuestra ser superior en desempeño al método de integración por diferencias finitas. Para poder lograr la uniformidad espacial, se emplean generadores específicos por forma:

- **Cilindro:** Inversión por truncación de una variable aleatoria continua. $z \sim \mathcal{U}[-H_{cil}/2, H_{cil}/2]; \phi \sim \mathcal{U}[0, 2\pi]$; radio $r_{cil} = R_{cil}\sqrt{u}$ con $u \sim \mathcal{U}[0, 1]$. (Devroye, 1986)
- **Cono:** Generación de puntos aleatorios uniformes dentro de un simplex general. base en $z = 0$ y vértice en $z = H$; para muestreo volumétrico uniforme se toma $t \sim \mathcal{U}(0, 1)$, $z = H_{cono}(1 - t^{1/3})$, $r_{max}(z) = R_{cono}(1 -$

Coulomb. Para densidades de carga uniformes ρ_1 y ρ_2 soportadas en volúmenes V_1 y V_2 , de manera exacta, la fuerza total constante es:

pares de muestras independientes $(\mathbf{r}_{1,i}, \mathbf{r}_{2,i})$ uniformes. El estimador estadístico de la fuerza es:

$z/H_{cono}), r = r_{max}\sqrt{u}$, $\varphi \sim U[0, 2\pi]$, luego se recentra restando $H_{cono}/4$ en z . (Ştefănescu, 2000)

- **Esfera:** Método de Marsaglia para muestreo uniforme en una esfera. Se usa el método estándar por descomposición radial y direccional. Radio: Se toma $u \sim \text{Uniform}(0, 1)$ y se fija

$$r = R u^{1/3} .$$

Dirección (uniforme en S^2):

Se elige $z \sim \text{Uniform}(-1, 1)$ (coseno del ángulo polar) y $\phi \sim \text{Uniform}(0, 2\pi)$. Con $w = \sqrt{1 - z^2}$, la dirección unitaria es $(w \cos \phi, w \sin \phi, z)$. Esto da puntos uniformes sobre la superficie de la esfera

unitaria; al multiplicar por r se obtienen puntos uniformes en el volumen. (Marsaglia, 1972)

3.5, 5.5, 7.5, 10 y ajustes de campo lejano (pendiente (s) de $\log_{10}(\text{FMC})$ vs. $s \log_{10}(d_{\text{total}}) + b$, para $d_{\text{total}} \geq 3$ m).

Cantidades reportadas

Para cada pareja de cuerpos con cargas totales iguales (lo que implica densidades distintas cuando los volúmenes son distintos), se evaluó la fuerza \mathbf{F} por Montecarlo sobre una malla de distancias entre centroides $d_{\text{total}} \{0, 0.25, 0.75, 1, 1.25, \dots, 10\}$, un barrido de factores de volumen relativo $\gamma \in \{0.25, 0.5, 0.75, 1.0, \dots, 10.0\}$. Se comparó con el modelo de fuerza puntual (FP) $|\mathbf{F}_{\text{puntual}}| = k |Q_1 Q_2|/d_{\text{total}}^2$ mediante las siguientes métricas:

- Magnitud absoluta $|\mathbf{F}|$ de la fuerza Montecarlo (FMC).
- Razón puntual $|\mathbf{F}|/|\mathbf{F}_{\text{puntual}}|$, (FMC/FP).
- Error vectorial relativo $\|\mathbf{F} - \mathbf{F}_{\text{puntual}}\|/|\mathbf{F}_{\text{pt}}|$, (EVR).
- Error angular relativo $(\angle \mathbf{F} - \angle \mathbf{F}_{\text{puntual}})/\angle \mathbf{F}_{\text{puntual}}$, (EAR).

3. Resultados

Para facilitar la lectura se presentan gráficos en escala logarítmica base 10 (eje y), con el eje x en d_{total} (distancia entre centroides) lineal, para los valores representativos de $\gamma = 0.25, 1, 2,$

a) Tendencias globales de FMC vs d_{total}

- Régimen cercano: a distancias ($d_{\text{total}} < 3$ m) (hasta el límite geométrico sin solape), las curvas de FMC/FP, se desvían hacia valores menores respecto el modelo puntual de cargas (FP) que tienen tendencia $1/d^2$. El aplanamiento (menor pendiente efectiva) es más marcado cuando una figura es alargada o apuntada en la dirección de separación (en parejas donde se encuentra el cilindro o cono), pues el reparto espacial de la carga suaviza el comportamiento $1/r^2$ al promediarse sobre distancias finitas (ver figura 2 b), c), d), y sus subgráficas, donde las curvas de FMC tienen menores valores respecto de la FP).
- Régimen lejano ($d_{\text{total}} \geq 3$ m): para las cuatro parejas de objetos, se realizó el ajuste a los valores $\log_{10}(\text{FMC}) = s \log_{10} d_{\text{total}} + b$, que arroja pendientes medias $s \approx -2$ con coeficientes de correlación altos, en la Tabla 1, se presentan los valores de las pendientes para los 4 pares de objetos. Esto confirma que, a distancias suficientemente grandes respecto a las dimensiones geométricas, el sistema recupera el decaimiento $1/d^2$ del dipolo puntual equivalente a dos cargas puntuales en sus centroides.

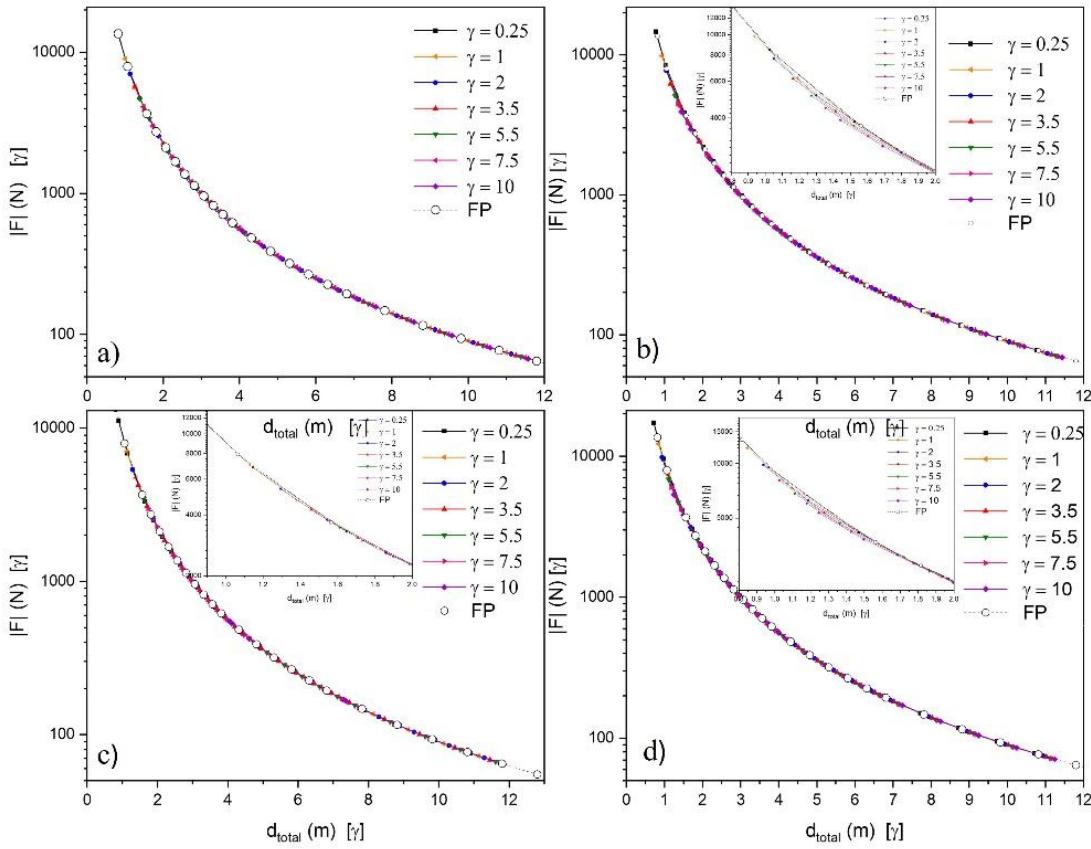


Figura 2. Gráficas de FMC contra d_{total} para a) esfera-esfera, b) esfera-cilindro, c) esfera-cono, d) cono-cilindro. FMC, en escala logarítmica. En los casos a), b) y c), se presenta un zoom para la zona $d_{total} < 2$.

Pareja	γ	Pendiente (s) al ajuste de $\log_{10} F \sim s \log_{10} d_{total} + b$	Coeficiente R^2
esfera-esfera	0.25	-1.99998386	1
esfera-esfera	1	-1.99997059	1
esfera-esfera	2	-1.99999183	1
esfera-esfera	3.5	-1.99999392	1
esfera-esfera	5.5	-1.99999826	1
esfera-esfera	7.5	-2.00003001	1
esfera-esfera	10	-1.99998644	1
esfera-cilindro	0.25	-1.99926017	0.99999998
esfera-cilindro	1	-1.99827105	0.99999991
esfera-cilindro	2	-1.99701663	0.99999973
esfera-cono	0.25	-2.00000227	1
esfera-cono	1	-2.00003029	1
esfera-cono	2	-2.00010524	1

esfera-cono	3.5	-2.00017761	1
esfera-cono	5.5	-2.00037511	0.99999999
esfera-cono	7.5	-2.0004122	0.99999999
esfera-cono	10	-2.00059229	0.99999998
cono-cilindro	0.25	-1.99958866	1
cono-cilindro	1	-1.99890922	0.99999997
cono-cilindro	2	-1.99824574	0.99999991
cono-cilindro	3.5	-1.9972945	0.99999978
cono-cilindro	5.5	-1.99637381	0.99999957
cono-cilindro	7.5	-1.99562327	0.99999937
cono-cilindro	10	-1.99479088	0.99999916

Tabla 1: Pendientes de ajuste para valores representativos de γ con $d_{\text{total}} > 3 \text{ m}$.

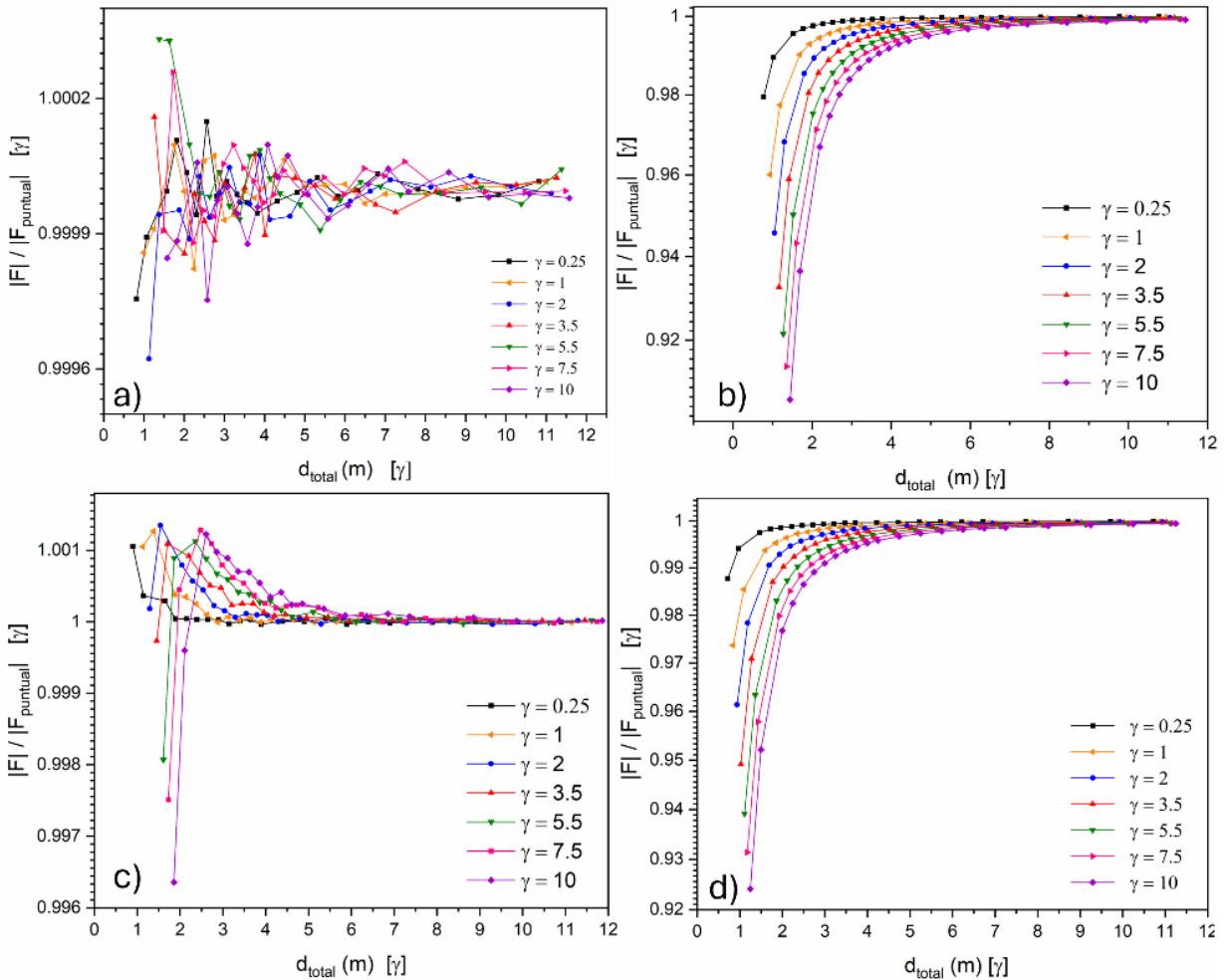


Figura 3. Gráficas de FMC/FP vs d_{total} , para a) esfera-esfera, b) esfera-cilindro, c) esfera-cono, d) cono-cilindro. FMC/FP en escala logarítmica.

b) Tendencias de FMC/FP vs d_{total}

La figura 3 a), b), c) y d) cuantifica directamente la validez del modelo de cargas puntuales. Todas las curvas convergen hacia el valor 1 al aumentar la separación, pero de diferentes formas y con diferentes velocidades:

- En esfera–esfera, la razón prácticamente es 1 en todo el rango de distancias.
- En esfera–cilindro y cono–cilindro, la convergencia a una razón de 0.98 ocurre aproximadamente a 2 m y 2.5 m respectivamente. La convergencia en

estas parejas se da en razones siempre menores a 1.

- En esfera–cono, en distancias cercanas, las razones se encuentran entre 1.01 y 0.995, es decir que son más exactas las fuerzas respecto del modelo puntual, incluso que en los casos esfera–cilindro y cono–cilindro. La convergencia para valores debajo de 1.01, está después de 3 m. Existe un cambio por debajo de 1 y por arriba de 1 en las razones FMC/FP hacia la convergencia.

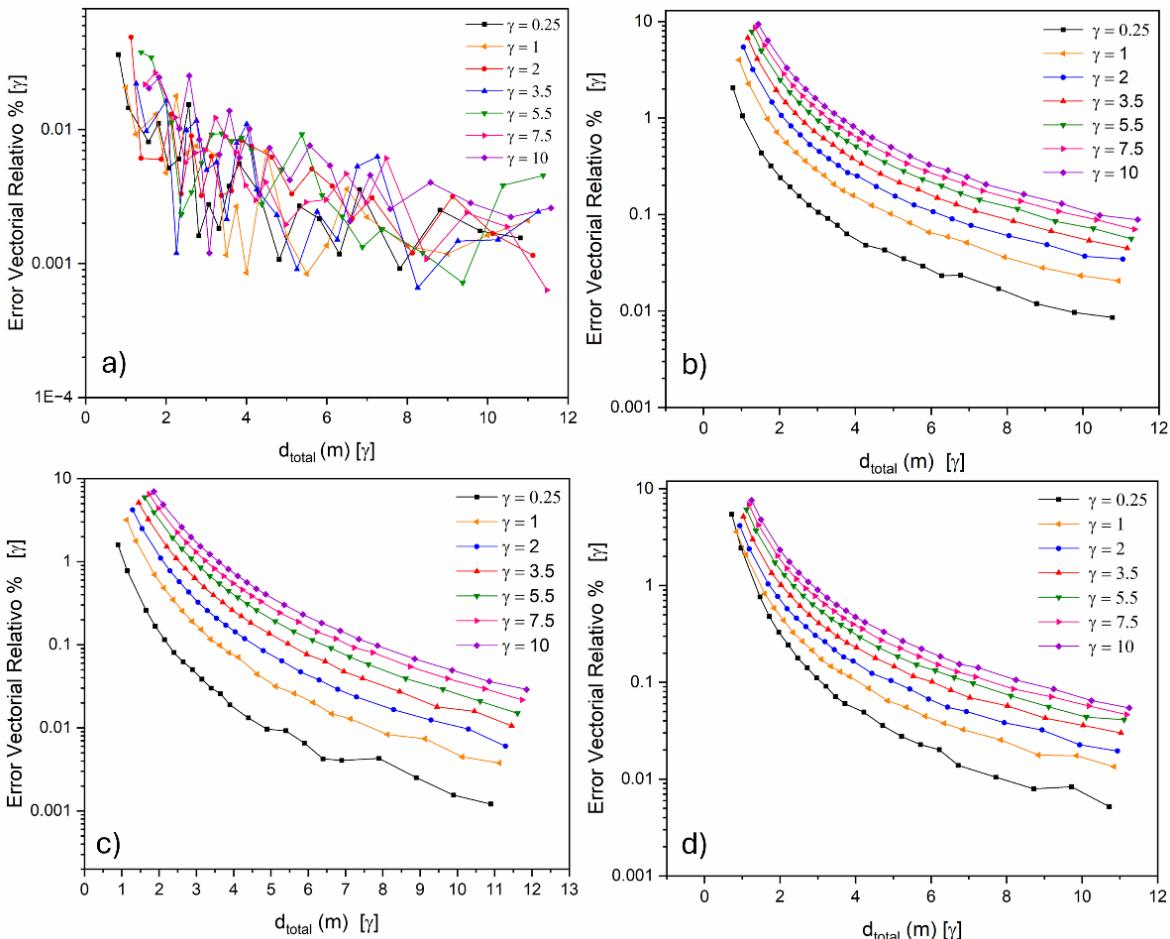


Figura 4. Gráficas EVR porcentual vs d_{total} , para a) esfera-esfera, b) esfera-cilindro, c) esfera-cono, d) cono-cilindro. EVR porcentual en escala logarítmica.

c) Tendencias del EVR vs d_{total}

La figura 4 a), b), c) y d), resume la magnitud del error global, combinando módulo y

dirección.

Todas las configuraciones muestran una disminución casi exponencial del error con la distancia:

- En esfera–esfera, los errores se encuentran entre 0.1% y 0.001%. Cae por debajo de 0.01 % después de 4 m. Prácticamente es idéntica la fuerza a la del modelo puntual.
- En esfera–cilindro y esfera–cono, los errores máximos están cerca del 10% para las distancias más próximas para $\gamma = 10$, y los más bajos, de 0.01% y de 0.001% para $\gamma = 0.25$ en la región lejana, respectivamente. En ambos

casos el error cae abajo del 1% para distancias mayores a 4 m.

- Cono–cilindro presenta los errores más grandes un poco menores al 10% en la región cercana y un error por debajo del 1%, para distancias más grandes que 4 m.
- Se aprecia que excepto para esfera–esfera, para valores más pequeños de γ (segundo objeto de menor tamaño y mayor densidad), el error decrece algo más rápido con la distancia, lo que se asocia a una distribución de carga menos homogénea y más concentrada para el segundo objeto.

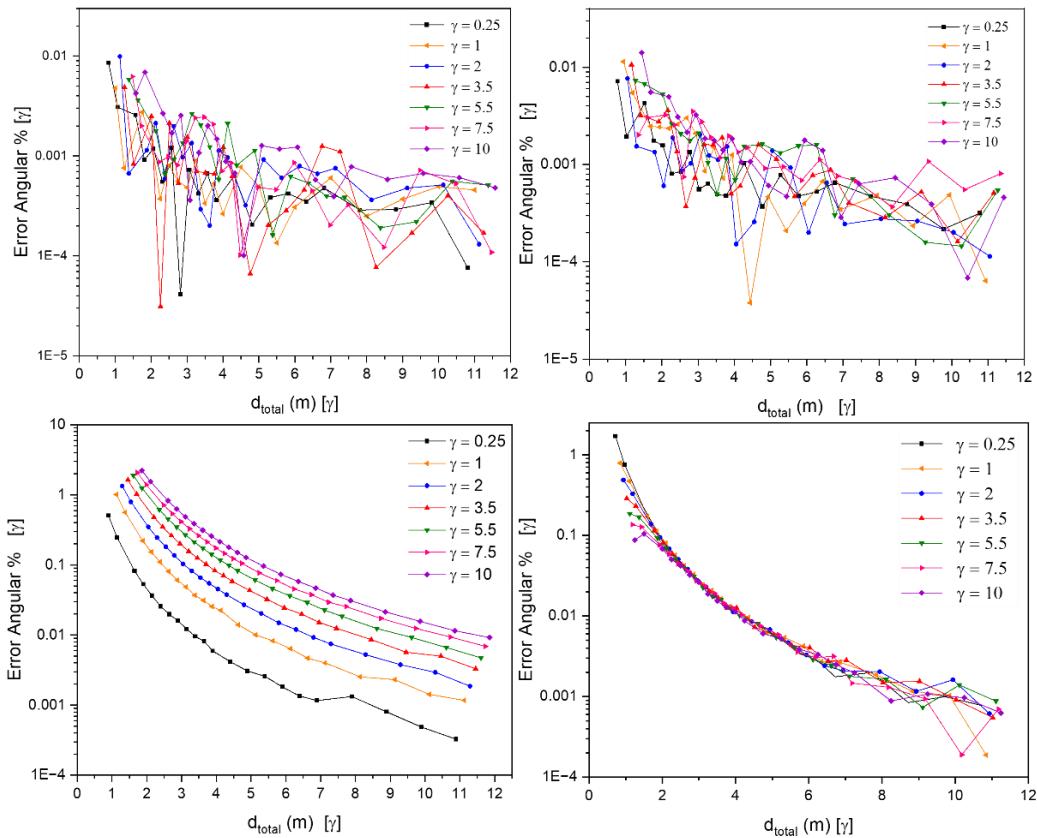


Figura 5. Gráficas EAR porcentual vs d_{total} , para a) esfera-esfera, b) esfera-cilindro, c) esfera-cono, d) cono-cilindro. EAR porcentual en escala logarítmica.

d) Tendencias en EAR vs d_{total}

El error angular complementa el análisis anterior mostrando la desviación direccional entre la fuerza Montecarlo y la puntual. En la figura 5 a), b), c) y d), se observa:

- Esfera–esfera y esfera–cilindro: error prácticamente nulo en todo el rango; el vector fuerza permanece alineado con la línea de centros.
- Esfera–cono y cono cilindro: errores angulares apreciables próximos al 2% para distancias < 2 m. En el caso del cono–cilindro, el error angular es casi independiente de γ .
- En todos los casos, la caída monotónica del error angular refleja la cancelación progresiva de los términos multipolares transversales y la tendencia de la fuerza total a alinearse con el eje de simetría.

Conclusiones

- Escalamiento universal: Los ajustes sobre el campo lejano de la figura 2 confirman el decaimiento $1/d^2$ en el campo lejano con pendientes muy cercanas a -2 , independiente de la geometría o de γ .
- En el caso esfera–esfera, los resultados prácticamente equivalen a los resultados de cargas puntuales.
- Influencia de la geometría: Las formas con puntas o ejes alargados (cono, cilindro) producen las mayores desviaciones en el régimen cercano, especialmente cuando el objeto con bordes afilados es la de menor volumen.
- En el caso de la esfera–cilindro, la EAR tiene valores comparables a los de la esfera–esfera, aunque esto puede deberse a la simetría en las posiciones de los cuerpos.

Referencias

- Banerjee, S., Peters, T., Brown, N. and Song, Y. (2021). Exact closed-form and asymptotic expressions for the electrostatic force between two conducting spheres. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 477, 1-31. <https://doi.org/10.1098/rspa.2020.0866>
- Batle, J., Ciftja O., Naseri, M., Ghoranneviss, M., Nagata, K. and Nakamura, T. (2017) Coulomb self-energy integral of a uniformly charged D-cube: A physically-based method for approximating multiple integrals. *Journal of Electrostatics*, 85, 52–60. <https://doi:10.1016/j.elstat.2016.12.008>
- Ciftja, O. (2019). Electrostatic interaction energy between two coaxial parallel uniformly charged disks. *Results in Physics*, 15, 1-4. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2019.102684>
- Nacional Institute of Standards and Technology, (2019): CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2018. https://physics.nist.gov/cuu/pdf/wall_2018.pdf
- Griffiths, D. (2023). *Introduction to Electrodynamics*. (5 ed.) Reed College, Oregon. Cambridge University Press.
- Devroye, L. (1986). Discrete Random Variates. En *Non-Uniform Random Variate Generation*, Chapter 23. (pp. 83-116). New York, United States of America. Springer-Verlag. <https://www.cs.fsu.edu/~mascagni/Devroye.pdf>

Fukuda, I. and Nakamura, H. (2022) Non-ewald methods for evaluating the electrostatic interactions of charge systems: Similarity and difference. *Biophysical Reviews*, 14(6), 1315–1340. <https://doi.org/10.1007/s12551-022-01029-2>

Fulcher, L. P. (1986). Improved result for the accuracy of Coulomb's law: A review of the Williams, Faller, and Hill experiment. *Physical Review A*. 33(1), 759-761. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.33.759>

Goldhaber, A. S., & Nieto, M. M. (2010). Photon and graviton mass limits. *Reviews of Modern Physics*. 82(1), 939-979. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.82.939>

Khair, A.S. (2013) Electrostatic forces on two almost touching nonspherical charged conductors. *Journal of Applied Physics*, 114(13). <https://doi.org/10.1063/1.4824540>

Lekner, J. (2012). Electrostatics of two charged conducting spheres. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 468(2145), 2829-2848. <https://doi.org/10.1098/rspa.2012.0133>

Marsaglia, G. (1972). Choosing a Point from the Surface of a Sphere. *The Annals of Mathematical Statistics*, 43(2), 645–646. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177692644>

Plimpton, S. J., & Lawton, W. E. (1936). A Very Accurate Test of Coulomb's Law of Force Between Charges. *Physical Review Journals Archive*, 50, 1066-1072. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.50.1066>

Ştefănescu, S. (2000). Generating uniform random points inside a cone. *Monte Carlo Methods and Applications*, 6(2), 115–130. <https://doi.org/10.1515/mcma.2000.6.2.115>

Tu, L., Luo, J. and Gillies, G.T. (2004) The Mass of the Photon. *Reports on Progress in Physics*, 68, 77-130. <https://doi.org/10.1088/0034-4885/68/1/r02>

Vuong, V. Q., Aradi, B., Niklasson, A., ¶, Cui Q. and Irle, S. (2023). Multipole expansion of atomic electron density fluctuation interactions in the density-functional tight-binding method. *Journal of Chemical Theory and Computation*, 19(21), 7592–7605. <https://doi.org/10.1021/acs.jctc.3c00778>.

Williams, E. R., Faller, J. E., & Hill, H. A. (1971). New experimental test of Coulomb's law: A laboratory upper limit on the photon rest mass. *Physical Review Letters*, 26, 721-724. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.26.721>