

Analogía hidráulica para la compresión de redes en la planeación de proyectos

Solis-Carcaño, R.¹, González-Fajardo, J. A.¹

Fecha de recepción: 11 de enero de 2017 – Fecha de aprobación: 28 de abril de 2017

RESUMEN

Para que un Proyecto tenga un buen desempeño, es necesario desarrollar un buen plan de ejecución y un programa para predecir el avance y el tiempo de terminación. La programación basada en redes ha sido la técnica más utilizada desde hace más de medio siglo. Por otro lado, un típico problema de programación ocurre cuando el tiempo estimado inicial para completar el proyecto excede el tiempo de terminación requerido por el propietario; un problema de esencia similar ocurre cuando un proyecto en curso se ha retrasado. En ambos casos es necesario encontrar una solución que cumpla con las limitaciones de tiempo y cause los costos directos más bajos posibles. El objetivo de este trabajo es divulgar un método basado en técnicas de redes para reducir el tiempo de terminación o el tiempo restante para completar un proyecto. El algoritmo para resolver el problema se basa en una analogía hidráulica; el método permite generar la curva de costos directos mínimos para diferentes duraciones de una red. El método es iterativo y es capaz de autocorregirse si se incurren en errores aritméticos; su principal ventaja sobre otros métodos es que el algoritmo en el que se basa es capaz de encontrar automáticamente la solución al problema, sin que sea necesario que el planificador tome decisiones sobre cuál o cuáles actividades de la red deben acortar su duración en cada iteración.

Palabras clave: Gestión de proyectos, programación de obras, compensación tiempo costo basada en redes, algoritmo para reducción de la duración, analogía hidráulica.

Hydraulic analogy for compression of networks in project planning

ABSTRACT

For a Project to have good performance, it is necessary to develop a good execution plan and schedule to predict progress and completion time. Scheduling based on networks has been the most widely used technique for more than half century. On the other hand, a typical scheduling problem occurs when the initial estimated time to complete the Project exceeds the completion time required by the owner; a problem of similar matter occurs when a Project in progress has been delayed. In both cases it is necessary to find a solution that complies with the time constraints and causes the lowest possible direct costs. The objective of this paper is to disclose a method based on networks techniques to reduce the completion time or remaining time to complete a Project. The algorithm to solve the problem is based on a hydraulic analogy; the method allows to generate the curve of minimum direct costs for different network durations. The method is iterative and is capable of self-correcting if arithmetic errors are incurred; its main advantage over other methods is that the algorithm on which it is based is able to automatically find the solution to the problem, without being necessary for the scheduler to make decisions about which of the activities of the network should shorten their duration each iteration.

Key words: Project management, scheduling, time-cost trade-off network procedures, Project reduction of completion time algorithm, hydraulic analogy

¹ Universidad de Autónoma de Yucatán, Facultad de Ingeniería. Correo electrónico: tulich@correo.uady.mx

Nota: Este artículo de investigación es parte de Ingeniería–Revista Académica de la Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Yucatán, Vol. 21, No.1, 2017, ISSN 2448-8364.

I.- INTRODUCCIÓN

El éxito en la ejecución de un proyecto está fuertemente influido por su etapa de planeación. Para la gestión del tiempo es fundamental la programación de las actividades que se requieren ejecutar (Serpell & Alarcón, 2001). La técnica más usada para la programación de proyectos es el Método de la Ruta Crítica, conocido como CPM (sigla de *Critical Path Method*), el cual permite calcular la duración del proyecto y las holguras de las actividades. En la versión original y más divulgada del CPM, la ejecución del proyecto es modelado como una red de flechas y nodos que representan actividades y eventos, respectivamente (Buckminster & Kuromiya, 1982).

Usualmente los programas se realizan considerando que las actividades se ejecutarán organizando el trabajo y haciendo uso de los recursos, de tal manera que se erogan los menores costos directos posibles. A esto se le suele denominar ejecución en condiciones normales, lo cual lleva generalmente a tiempos que no corresponden a los menores posibles (Phillips, 1977).

Sin embargo, en muchas ocasiones los plazos para el inicio de las operaciones de los proyectos –fijados por los inversionistas privados o por los organismos de gobierno– no permiten llevar a cabo la ejecución en las mencionadas condiciones normales, por lo que se hace necesario tomar la decisión de reducir o comprimir el programa. Otro caso en el que se requiere tomar esta decisión se presenta durante la ejecución del proyecto, cuando surgen eventos imprevistos que provocan atrasos respecto al programa original (*baseline*) y, como consecuencia, pronósticos de conclusión que rebasan la fecha acordada (Solís *et al.*, 2009).

Algunas de las estrategias que se pueden seguir para comprimir el tiempo de las actividades de un proyecto son: modificar el método de trabajo, aumentar el número recursos humanos y/o maquinarias, trabajar más días a la semana y/o más horas al día, ofrecer bonos de productividad a los trabajadores, etc. (Thomas & Yiakoumis, 1987). Cualquiera de estas estrategias provoca por lo general un sobre costo; de ahí que sea necesario determinar cuáles actividades se tendrían que realizar con duraciones menores a las normales, buscando tener los menores sobre costos en el proyecto.

Existen diferentes métodos para comprimir redes, los cuales se basan en algoritmos que buscan determinar, en sucesivas iteraciones, el menor sobre costo posible para cada reducción en la duración del proyecto. En

estos métodos el programador debe analizar las actividades críticas (sin holgura) y decidir cuáles conviene comprimir, utilizando el criterio de generar el menor sobre costo (Ahn & Erenguc, 1998). Sin embargo, cuando las redes son muy complejas, este proceso de análisis y toma de decisiones se vuelve muy complicado y susceptible a que el programador cometa errores.

El objetivo del presente escrito es divulgar un método de compresión de redes basado en una analogía hidráulica, que permite generar la curva de costos directos mínimos, para diferentes duraciones factibles menores a la duración del proyecto en condiciones normales.

El concepto del método que se presenta es atribuido en el ámbito académico a Lloyd Cutcliffe, profesor que debió haberlo desarrollado en la década de los '60. Sin embargo, los autores de este trabajo no encontraron publicación alguna en la que se explique, por lo que han juzgado relevante desarrollar este concepto construyendo una interpretación original de la analogía hidráulica.

La principal ventaja sobre otros métodos, es que el algoritmo en que se fundamenta es capaz de encontrar en forma automática la solución al problema de comprimir la red, sin que sea necesario que el programador tome decisiones. Lo anterior facilita su programación en lenguaje computacional.

En forma particular, esta analogía ha sido útil a los autores del presente trabajo, para la enseñanza de la programación de proyectos en cursos de posgrado, ya que relaciona un concepto hidráulico conocido por los estudiantes con otro que es nuevo para ellos, como es la compresión del tiempo de ejecución de un proyecto.

Antes de iniciar con la explicación del método, se presenta en la Tabla 1 la simbología que se usará en las siguientes secciones.

II.- DESARROLLO DEL MÉTODO

En esta sección se presenta la analogía entre los conceptos de compresión de una red y de flujo de agua en un sistema de conducción, desarrollado por los autores. También se explica las reglas que se siguen para calcular los tiempos y los flujos de los nodos de una red hasta su compresión máxima.

PLANTEAMIENTO DE LA ANALOGÍA

El método permite comprimir, por medio de una analogía hidráulica, una red de actividades que representa el programa de ejecución de un proyecto.

En su desarrollo se combina los algoritmos de CPM (Moder & Phillip, 1970) y de Ford-Fulkerson (Ford & Fulkerson, 1962); el primero es sumamente conocido y sirve para calcular el tiempo de ejecución de un

proyecto, y el segundo determina cuáles actividades conviene comprimir utilizando el criterio de disminuir el tiempo de ejecución al costo más bajo posible.

Tabla 1. Simbología usada en la explicación del método.

Símbolo	Significado
C_{max}	Costo máximo de una actividad o del proyecto
C_n	Costo normal de una actividad o del proyecto
F	Flujo que puede llegar a un nodo de la red
F_A	Flujo acumulado de la red después de varias iteraciones
F_{max}	Flujo máximo de la red en una iteración
i	Nodo o evento inicial de una actividad
j	Nodo o evento final de una actividad
P	Pendiente de un segmento lineal
Q	Razón $\Delta\text{costo}/\Delta\text{tiempo}$ de una actividad, equivalente a la capacidad inicial de su tubo normal
Q_{res}	Capacidad residual de un tubo normal o adicional
$\Delta Q_1, \Delta Q_2$	Incremento a la razón $\Delta\text{costo}/\Delta\text{tiempo}$ del n-ésimo segmento lineal de una actividad con función tiempo-costo no lineal (aproximada con varios segmentos)
RC	Ruta crítica de la red
SC	Sobrecosto del proyecto
T_n	Tiempo normal de una actividad o del proyecto
T_{min}	Tiempo mínimo de una actividad o del proyecto
T_1, T_2, \dots	Tiempo asociado al inicio del n-ésimo segmento lineal de una actividad con función tiempo-costo no lineal (aproximada con varios segmentos)
T_t	Tiempo de ocurrencia más temprano de un evento

El algoritmo de Ford-Fulkerson se utiliza para calcular el flujo máximo (F_{max}) que puede transportarse desde un nodo de origen (fuente) hasta un nodo final (sumidero), a través de una red de conductos formada por varios tramos o arcos delimitados por nodos intermedios. Para resolver el problema del cálculo del F_{max} se considera que cada tramo tiene una capacidad máxima de flujo (por ejemplo, en litros/segundo).

Cuando la organización requiere disminuir el tiempo de ejecución del proyecto necesita aplicar un procedimiento, que se basa disminuir el tiempo de aquellas actividades que más impactan en el tiempo del proyecto. La analogía consiste en considerar que el sobrecosto que se tiene que erogar por disminuir la duración del proyecto en una unidad de tiempo es un concepto semejante al flujo de agua máximo que puede ser conducido por una red de tubos desde el nodo inicial hasta el final.

Para aplicar el método se requiere definir para cada actividad una función matemática que relacione su costo con su tiempo de ejecución. De acuerdo a la teoría de la administración de proyectos, cuando la organización hace un uso eficiente de los recursos, las actividades se realizan en su tiempo normal (T_n), el

cual está asociado a un costo normal (C_n) que se aproxima al mínimo posible. Sin embargo, si se requiere disminuir el tiempo de alguna actividad (por ejemplo, a través del incremento de personal y máquinas) suele haber una disminución en la productividad, que genera un sobrecosto. Esta medida alcanza un límite cuando se llega a un punto en el que no es posible disminuir más el tiempo, aunque se siguiera incrementando el costo. En este punto se considera que la actividad ha llegado a su tiempo mínimo (T_{min}) que corresponde al costo máximo (C_{max}), denominado en inglés *crash cost* (Morder & Phillips, 1970).

En la aplicación del método por lo general se considera que las funciones que relacionan las variables tiempo y costo son de tipo lineal. En la Figura 1 en su parte a) se muestra una función de este tipo, en la que el incremento de costo al disminuir el tiempo es constante y está simbolizada con la letra Q. Para una función no lineal se puede hacer una aproximación representándola con una poligonal abierta, formada por tantos segmentos lineales como pendientes se consideren adecuadas (Elbelagi *et al.*, 2005; Antill & Woodhead, 1995); lo anterior se ilustra en la parte b) de la misma figura, para una actividad con 3 pendientes: Q, $Q+(\Delta Q_1)$ y

$Q+(\Delta Q_1+\Delta Q_2)$; en donde ΔQ_1 y ΔQ_2 representan

incrementos a la pendiente del segmento anterior.

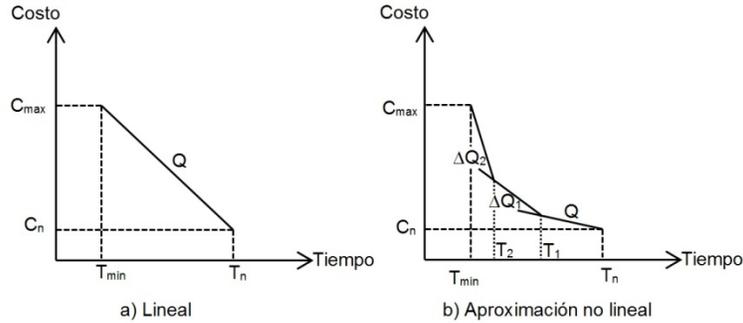


Figura 1. Funciones tiempo-costo de una actividad.

En el caso de una función lineal, la analogía hidráulica consiste en considerar que cada actividad de un proyecto equivale a un par de tubos paralelos que están delimitados por sus nodos de inicio (i) y terminación (j). Uno de los tubos es llamado tubo normal y puede transportar un flujo máximo que es equivalente a Q (Figura 1). El otro tubo es llamado tubo límite y en él puede fluir agua únicamente

cuando el tubo normal se ha llenado, funcionando como un rebosadero; se considera que el flujo que puede transportar este tubo es teóricamente infinito (∞), por lo que nunca se llenará. La analogía se ilustra en la Figura 2. Se hace la observación que las llamadas actividades ficticias en CPM, cuya duración es cero, únicamente tienen tubo límite.

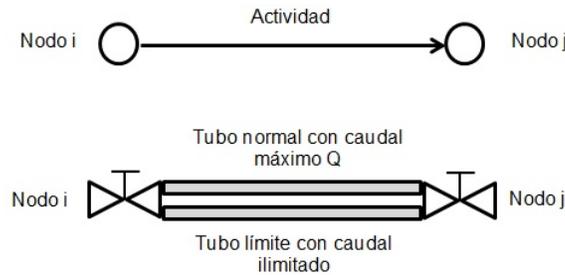


Figura 2. Representación de una actividad con función tiempo-costo lineal de acuerdo con la analogía hidráulica.

Cuando en una actividad se consideran varias pendientes, se requerirá un tubo adicional por cada incremento en la razón entre el costo y el tiempo ($\Delta Q_1, \Delta Q_2, \dots$). Por ejemplo, si se tienen tres segmentos (como se ilustra en la parte b) de la Figura 1 la actividad requerirá: 1 tubo normal, 2 tubos adicionales y 1 tubo límite.

El método se aplica por medio de iteraciones sucesivas; en cada una de ellas se calcula de manera simultánea el tiempo de ocurrencia más temprano (T_i) de cada nodo y el flujo de agua (F) que le podría llegar a través de los tubos que concurren en él. Al concluir cada iteración se obtiene el F_{max} de la red, el cual se hace correr por los tubos normales de las actividades de la ruta crítica (RC), antes de iniciar la siguiente iteración.

Cuando el tubo normal de alguna actividad se llene,

ésta podría iniciar su compresión y tomar algún valor de tiempo comprendido entre T_n y T_{min} . A partir de que esto suceda podría empezar a fluir agua por su tubo límite; y cuando ocurra lo anterior, la duración de la actividad se habrá comprimido hasta su T_{min} .

En la Figura 3 se ilustra la forma en la que se representan los cálculos de los tiempos y flujos, en una red formada por cuatro actividades con funciones tiempo-costo de tipo lineal y una ficticia. Esta red servirá para ejemplificar el método en las siguientes secciones.

A) PRIMERA ITERACIÓN

En la primera iteración se considera que todas las actividades tienen su duración normal, es decir que se encuentran en su punto T_n, C_n (ver Figura 1). La aplicación del algoritmo de CPM permite identificar el camino más largo entre los nodos de inicio y

terminación de una red; este camino se denomina la ruta crítica y la suma de las duraciones de las actividades que la conforman define la duración total

del proyecto (East, 2015).

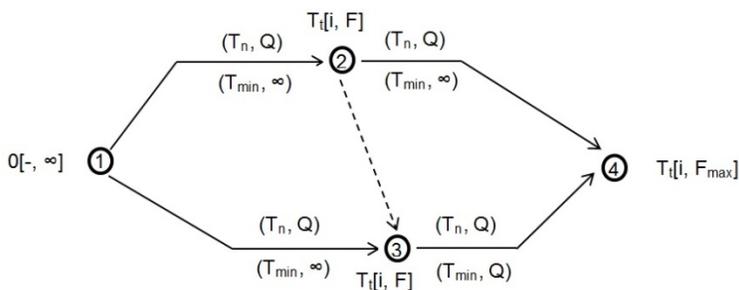


Figura 3.- Simbología usada en los cálculos para la compresión de una red.

En CPM se considera que el nodo de inicio de la red tiene un tiempo de ocurrencia más temprano (T_t) igual a cero; y de acuerdo a la analogía, el flujo (F) de agua que se podría verter al sistema tiene un valor infinito (ver Figura 3). Lo anterior significa que la ejecución del proyecto no se ha iniciado, y que no se ha fijado un límite para los posibles sobrecostos, mientras éstos produzcan disminuciones en el tiempo de ejecución.

Para cada uno de los demás nodos de la red se calcula su T_t y simultáneamente el F que podría llegar a él. El T_t de cada nodo j (extremo final de cualquier actividad) se obtiene por medio del llamado cálculo hacia delante del algoritmo de CPM, con el cual se elige entre las actividades que terminan en ese nodo a la que finaliza más tarde, y por consecuencia define el camino más largo hasta él. El T_t de ese nodo se calcula por medio de la suma del T_t de su nodo i y la duración de esa actividad (East, 2015).

El F que podría llegar a ese nodo j se obtiene por medio del algoritmo de Ford-Fulkerson (Ford & Fulkerson, 1962), con el cual se elige el menor valor entre el F que podría salir del nodo i de la actividad que ha definido el T_t (de ese nodo j) y el flujo que se puede transportar por el tubo normal de esa actividad. En esta primera iteración todos los tubos están vacíos, por lo que pueden transportar un flujo igual a su correspondiente Q .

Cuando dos o más actividades concurrentes en un nodo j produzcan el mismo T_t , se considerará que este tiempo ha sido definido por aquella que pueda llevar el mayor F a ese nodo. La razón de lo anterior es que el final de la aplicación del método ocurre cuando todos los tubos normales de las actividades críticas se han llenado, de ahí que lo más conveniente sea hacer correr la mayor cantidad de agua posible en el sistema.

Adicionalmente en cada nodo j , además de calcular T_t y F , se identifica el nodo i de la actividad que determinó este tiempo y flujo (ver Figura 3). La sucesión de estos nodos, desde el inicio hasta el final de la red, permitirá identificar la RC al concluir esta iteración y determinar los tubos por los que empezará a correr agua.

Los resultados de esta primera iteración son: la duración normal del proyecto (T_t del nodo final), la RC y el F_{max} (F de nodo final). El F_{max} habrá tomado el valor de la menor Q de las actividades de la RC; la actividad que corresponda a esta Q será la que más convenga comprimir en la siguiente iteración, por ser la que tiene el menor sobrecosto por unidad de tiempo, lo cual llevará a la mejor solución desde el punto de vista económico.

En el caso de que haya más de una actividad de la RC con esa Q (de menor valor), se podrían comprimir varias de ellas, o incluso todas, dependiendo de los resultados de los cálculos de los T_t en la segunda iteración.

En la Figura 4 se muestra como ejemplo la primera iteración de la red presentada en la Figura 3, considerando que todas las actividades tienen funciones tiempo-costo de tipo lineal. Sobre la flecha de cada actividad se ha escrito entre paréntesis el tiempo normal y la pendiente; por ejemplo, para el caso de la actividad 1-3 los valores son (4,1). Debajo de la flecha de cada actividad se ha escrito entre paréntesis el tiempo mínimo y la capacidad de flujo del tubo límite; para el caso de la actividad 1-3 los valores son (2, ∞). Lo anterior significa que el tiempo de ejecución de esa actividad podría variar entre 4 (T_n) y 2 (T_{min}) unidades, y que se tendría que erogar un sobrecosto de 1 unidad monetaria cada vez que se comprima 1 unidad de tiempo.

También junto a cada nodo se ha escrito su T_i , y entre corchetes el nodo i de la actividad que definió este tiempo y el F que podría llegar a ese nodo; para el caso del nodo 3 los valores son $4[1,1]$. Lo anterior significa que el tiempo más temprano en que el evento representado por el nodo 3 puede ocurrir (considerando tiempos normales) es 4 unidades, y que a ese nodo puede llegar un flujo que resulta ser el menor entre el que podría salir del nodo 1 (∞) y la Q del tubo normal (1) de la actividad 1-3.

En esta primera iteración la RC pasó por las actividades 1-3 y 3-4, la duración normal del proyecto fue 10 y el F_{\max} fue 1 (Q del tubo normal de la actividad 1-3). Se intuye que en la siguiente iteración se comprimirá esta actividad a un costo de 1 unidad monetaria por cada unidad de tiempo. En esta figura y en las sucesivas se destacan las actividades críticas con un sombreado, que de acuerdo a la analogía puede tomarse como una representación del flujo de agua que correrá al iniciar la siguiente iteración.

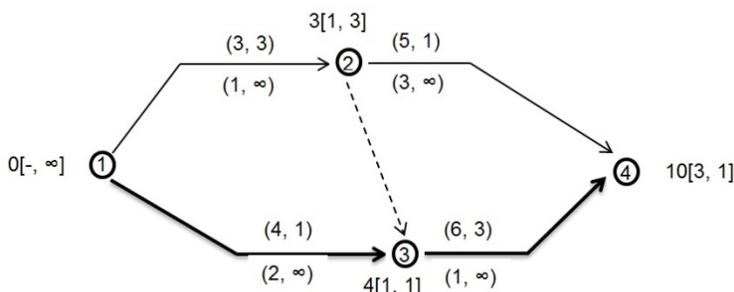


Figura 4. Primera iteración de un ejemplo de aplicación del método.

B) SEGUNDA ITERACIÓN

Antes de iniciar la segunda iteración, el F_{\max} calculado en la primera se asigna a lo largo de la RC, la cual se podrá identificar siguiendo la anotación de la i que se encuentra en cada nodo (ver figuras 3 y 4). De acuerdo con la analogía, el nodo de inicio de la red empieza a funcionar como una fuente que verterá al sistema el F_{\max} calculado anteriormente, el cual correrá por los tubos normales de las actividades de la RC hasta el nodo final.

Como consecuencia de lo anterior, se llenarán los tubos normales de las actividades con Q igual F_{\max} ; y los tubos de la RC con $Q > F_{\max}$ conducirán agua parcialmente llenos, por lo que tendrán a partir de este momento, una capacidad residual (Q_{res}), que se calcula como Q menos el flujo ya asignado. A cada tubo que conduzca agua se le llevará la cuenta del flujo asignado, el cual se podrá ir acumulando en las siguientes iteraciones.

Por el principio de continuidad hidráulica, el flujo que entra en cada nodo siempre será igual al que sale de él. Por lo tanto, el flujo que se vierte al sistema en el nodo inicial será el mismo que debe salir por el nodo final.

En esta segunda iteración, el T_i de cada nodo j se calculará de la misma forma como se explicó en la primera iteración; únicamente habrá que tomar en cuenta que las actividades que han llenado su tubo

normal podrían tomar cualquier valor entre su T_n y T_{\min} , como se explica más adelante.

Para el cálculo del F que podría llegar a esos nodos se puede presentar tres casos:

- Cuando el T_i ha sido definido por una actividad que tiene el tubo normal lleno.- En este caso el flujo que se asigne a esa actividad tendría que correr por su tubo límite; y el F que podría llegar a su nodo j sería el que pueda salir de su nodo i , ya que el flujo que es capaz de transportar el tubo límite es infinito.
- Cuando el T_i ha sido definido por una actividad cuyo tubo normal conduce agua parcialmente lleno.- En este caso el F de su nodo j será el menor entre el F que podría salir de su nodo i y el Q_{res} que es capaz de transportar su tubo normal.
- Cuando el T_i ha sido definido por una actividad cuyo tubo está vacío.- El F que puede llegar a su nodo j se calculará, igual que en la primera iteración, como el menor valor entre el F que podría salir de su nodo i y su Q .

Cada actividad que haya llenado su tubo normal podría o no comprimirse, por lo que se dice que tiene una duración flexible. En primera instancia, para acelerar el proceso, conviene suponer que la actividad se comprimirá hasta su T_{\min} (ver Figura 1); sin embargo, su duración sólo se sabrá hasta que en esta iteración se haya definido el T_i de su nodo j , el cual

dependerá de todas las actividades concurrentes en él.

En el caso de que la actividad que tiene su tubo normal lleno haya definido este T_i , entonces se comprimirá efectivamente a su T_{min} . En caso contrario, significará que ha surgido otra RC, y la duración de esa actividad se calculará como la diferencia entre el T_i de su nodo j (que fue definido por otra actividad) y el T_i de su nodo i , sin que pueda dejar de ser crítica.

En esta segunda iteración por lo general una o varias de las actividades que hayan llenado su tubo normal se comprimirán y tendrán un sobrecosto. La única excepción a este caso podría darse cuando existan varias RC paralelas e independientes, lo que podría requerir de más de una iteración para que la compresión se produzca.

En las siguientes iteraciones las actividades con el tubo normal lleno podrían seguir comprimiéndose hasta alcanzar su T_{min} , o excepcionalmente podrían volver aumentar su duración; sin embargo, nunca dejarán de ser críticas.

Como se ha mencionado antes, podría ocurrir que k actividades críticas se compriman en esta iteración, por lo que el sobrecosto (SC) del proyecto sería igual a la suma de los productos de las unidades de tiempo disminuidas (C) por la pendiente (P) de cada actividad comprimida (Ecuación 1).

$$SC = \sum_{k=1}^n C_k P_k \quad (1)$$

Para las actividades con función tiempo-costo lineal, P es siempre igual a Q . Mientras que, para las actividades con función no lineal, P será igual a la pendiente del

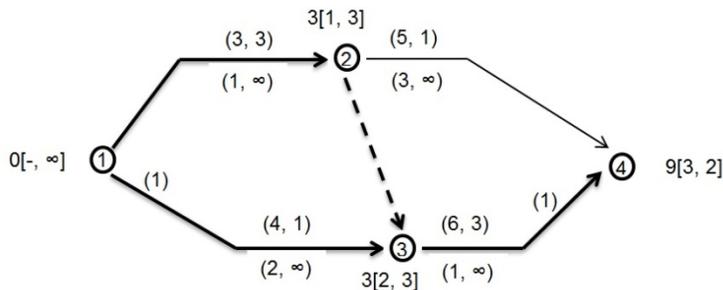


Figura 5. Segunda iteración del ejemplo.

C) ITERACIONES SIGUIENTES

Siguiendo con la analogía, al concluir cada iteración la fuente verterá al sistema el F_{max} calculado en la iteración anterior, el cual correrá por los tubos de las actividades de la RC definida en esa iteración. Lo anterior, en el caso general, provocará que se llene al

segmento que corresponda; para el primer segmento, P será igual a Q , y para los demás se calculará como la suma de Q más los ΔQ de los segmentos que ya conduzcan agua (Figura 1).

En la Figura 5 se presenta la segunda iteración del ejemplo. Sobre las actividades que formaron la RC de la primera iteración (1-3 y 3-4) se ha anotado en la parte oblicua de sus flechas el flujo que se asignó (1), que corresponde al F_{max} de la primera iteración. En el nodo 3 el T_i (3) fue determinado por la actividad 2-3, por lo que la duración de la actividad 1-3 resultó ser 3 (comprendida entre T_n y T_{max}), y continuó siendo crítica. En esta segunda iteración surgió una nueva RC que pasa por las actividades 1-2, 2-3 y 3-4. El F_{max} de la red fue 2, y será el flujo que se hará correr por estas actividades, antes de iniciar la tercera iteración.

El resultado de la segunda iteración fue la disminución de la actividad 1-3 y del proyecto en 1 unidad de tiempo (de 4 a 3 y de 10 a 9 unidades, respectivamente). El sobrecosto asociado es de 1 (1 unidad monetaria por 1 unidad de tiempo, que corresponde a la Q de 1-3). El flujo acumulado (F_A) que se ha hecho correr en el sistema, hasta esta iteración, es de 1 (F_{max} de la primera iteración).

menos un tubo normal de alguna actividad de esa RC. También puede provocar que otras actividades reciban flujo en sus tubos normales por primera vez (aquellas que formen parte de una RC por primera vez); o que otras que ya han estado conduciendo agua, disminuyan su Q_{res} sin llenarse (aquellas que hayan

formado parte de una RC en iteraciones anteriores); o bien, que otras actividades que en iteraciones anteriores llenaron su tubo normal, empiecen a conducir agua por su tubo límite (aquellas que se hayan comprimido en iteraciones anteriores). En este último caso se empezará a llevar también la cuenta del flujo asignado a este tubo, siendo su capacidad residual siempre ∞ .

En la ejecución de los cálculos de las iteraciones se seguirán las siguientes reglas generales:

Duración de cada actividad.- Si su tubo normal está vacío o parcialmente lleno su duración será T_n ; si su tubo normal está lleno su duración será flexible (como se explicó en la sección de la segunda iteración); si su tubo límite ya conduce agua su duración será T_{min} . Para este último caso, en iteraciones subsecuentes se podrá seguir asignando flujos adicionales a esta actividad, pero sin que esto signifique que su duración disminuya, ni que se produzca algún sobre costo adicional, pues ya habrá alcanzado su *crash cost*.

Tiempo de ocurrencia más temprano (T_t) de cada nodo j.- Para cada actividad cuyo extremo final concorra en ese nodo j, se calculará la suma de T_t de su nodo i más su duración; el T_t del nodo j será el mayor valor de los anteriormente calculados. Como se explicó en el párrafo anterior, para actividades con duraciones flexibles se supone inicialmente que su

duración es T_{min} , para efectos de este cálculo.

Flujo (F) que podría llegar a cada nodo j.- Si el T_t del nodo j lo determinó una actividad cuyo tubo normal está vacío, el F del nodo j será el menor valor entre el F del su nodo i y su Q; si el T_t lo determinó una actividad cuyo tubo normal está parcialmente lleno, el F del nodo j será el menor valor entre el F del su nodo i y su Q_{res} ; si el T_t lo determinó una actividad cuyo tubo normal está lleno (indistintamente que conduzca agua por su tubo límite o no), el F de su nodo j será igual al F de su nodo i. Posteriormente se explicará una regla de excepción cuando el flujo de agua cambia de sentido.

Los resultados de cada iteración serán los siguientes: la duración comprimida del proyecto (T_t del nodo final); el flujo acumulado y el sobre costo total del proyecto (F_A y SC); la actualización de las RC; y la duración de cada actividad comprimida y su respectivo sobre costo.

Para definir las duraciones y la capacidad de flujo de los tubos de las actividades con función tiempo-costo no lineal se pueden definir reglas prácticas. En la Tabla 2 se presenta un ejemplo para una actividad con tres segmentos, la cual corresponde a la ilustrada en la Figura 1. La Figura 6 ilustra la forma de hacer las anotaciones de los datos en una actividad de este tipo.

Tabla 2. Duraciones de la actividad y capacidades de los tubos de una actividad con tres segmentos.

Tubo	Duración de la actividad	Capacidad del tubo
Normal vacío	Tiempo normal (T_n)	Pendiente del primer segmento (Q)
Normal parcialmente lleno	Tiempo normal (T_n)	Q_{res} del tubo normal
Normal lleno	Flexible (entre T_n y T_1)	Incremento de la pendiente en el segundo segmento (ΔQ_1)
Adicional 1 parcialmente lleno	Tiempo inicial del segundo segmento (T_1)	Q_{res} del tubo adicional 1
Adicional 1 lleno	Flexible (entre T_1 y T_2)	Incremento de la pendiente en el tercer segmento (ΔQ_2)
Adicional 2 parcialmente lleno	Tiempo inicial del segundo segmento (T_2)	Q_{res} del tubo adicional 2
Adicional 2 lleno	Flexible (entre T_2 y T_{min})	Infinito
Límite parcialmente lleno	Tiempo mínimo (T_{min})	Infinito

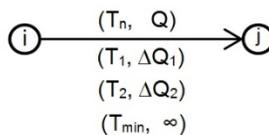


Figura 6. Representación de una actividad con función tiempo-costo no lineal, con tres segmentos.

En la Figura 7 se presenta la tercera iteración del

ejemplo. Sobre las actividades que formaron la RC

determinada en la segunda iteración (1-2, 2-3 y 3-4) se ha anotado en la parte oblicua de sus flechas el flujo que han acumulado. En esta tercera iteración ha surgido una nueva RC que pasa por las actividades 1-2, y 2-4. En el nodo 4 el T_t (8) fue determinado por la actividad 2-4, por lo que la duración de la actividad 3-4 resultó ser 5 (comprendida entre T_n y T_{max}) y continuó siendo crítica. El F_{max} de la red fue 1, y será el flujo que se haga correr por las actividades 1-2, y 2-

4, antes de iniciar la cuarta iteración.

El resultado de la tercera iteración fue la disminución de la actividad 3-4 y del proyecto en una 1 unidad de tiempo (de 6 a 5 y de 9 a 8 unidades, respectivamente). El sobrecosto asociado es de 3 (3 unidades monetarias por 1 unidad de tiempo). El flujo acumulado (F_A) que ya se ha hecho correr en el sistema, hasta esta iteración, es de 3.

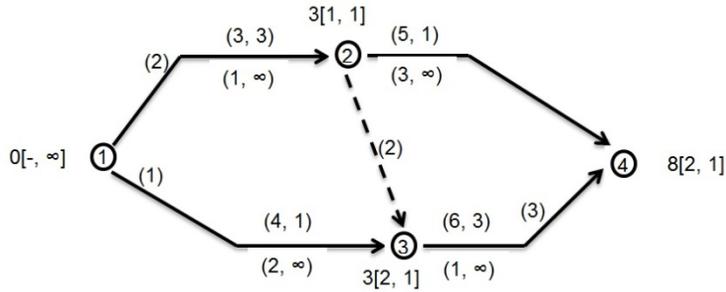


Figura 7. Tercera iteración del ejemplo.

D) RETROCESO DEL FLUJO

Todas las actividades no ficticias que en los cálculos de las sucesivas iteraciones se hayan vuelto críticas, seguirán siéndolo durante toda la aplicación del método. Sin embargo, cuando en el proceso iterativo alguna actividad que ya era crítica, aparentemente deja de serlo, es necesario revisar si en realidad ha aparecido una holgura.

La revisión consiste en restar al T_t del nodo j su duración actual; si la resta es mayor que el T_t de su nodo i , entonces sí se estaría generando una holgura y sería necesario realizar un ajuste. La duración actual referida sería T_n en el caso de que sólo conduzca agua por el tubo normal; y sería T_{min} , cuando ya lo haga por el tubo límite.

El ajuste consiste en recalculer para esa actividad el T_t de su nodo i a partir del de su nodo j , de manera similar al denominado cálculo hacia atrás del algoritmo de CPM (Weber, 2005). En el caso de que la actividad en cuestión conduzca agua únicamente por su tubo normal, el T_t de su nodo i se obtendrá restando su T_n al T_t de su nodo j ; lo cual mantendrá crítica a la actividad y provocará el menor valor posible en el T_t de su nodo i . En el caso de que esa actividad también conduzca agua por su tubo límite, el T_t de su nodo i se obtendrá restando su T_{min} al T_t de su nodo j ; lo cual también mantendrá crítica a la actividad.

El incremento en el T_t del nodo i respecto al que se

calculó previamente, eliminará la aparente holgura. Sin embargo, esto puede provocar una reacción en cadena en otros nodos que están directamente relacionados con el T_t del nodo i recalculado; por lo que se tendrá que revisar si han aparecido nuevas aparentes holguras en otras actividades críticas. Si éste fuera el caso, se deberán hacer los recálculos necesarios en la forma en que se ha explicado, para eliminar todas las aparentes holguras.

De acuerdo con la analogía cuando ocurre lo descrito, el agua que ha estado fluyendo en los tubos de esa actividad (ya sea por el normal o el límite) lo hará en la siguiente iteración en sentido inverso, es decir regresará del nodo j al i . Por lo anterior, se hace necesario recalculer el F que podría llegar a su nodo i , eligiendo el menor valor entre el F de su nodo j y el flujo que ya ha sido asignado al tubo de la actividad (ya sea en el normal o en el límite, según el caso). Es importante hacer notar que para recalculer esa F no se considera el Q_{res} (como cuando el flujo tiene el sentido normal), sino el agua que ya fluye por el tubo. Cuando el retroceso de flujo se produzca en una actividad ficticia, el F se recalculará de la misma forma.

En el caso de un retroceso de flujo se producirá un incremento en la duración de esa actividad crítica, que ya había sido previamente comprimida; sin embargo, en ningún caso podrá rebasar su T_n y dejar de ser crítica.

Al iniciar la siguiente iteración, cuando se asigne el F_{max} a alguna actividad crítica que haya tenido retroceso en el flujo, el F_{max} se restará al flujo que haya acumulado en las iteraciones anteriores.

A partir de lo anterior, se pueden establecer las siguientes dos reglas:

- Habrà retroceso de flujo en una actividad crítica cuando la diferencia entre el T_t de su nodo j y su duración actual (comprendida entre T_n y T_{min}), sea mayor que el T_t del nodo i .
- La asignación de flujos antes del inicio de cada iteración se puede generalizar de la siguiente forma: si el recorrido del agua tiene el sentido del nodo i hacia el nodo j de la actividad, el flujo se suma al que tenía previamente (disminuyendo su Q_{res}); mientras que, si el recorrido es del nodo j al nodo i , entonces el flujo se resta (aumentando su Q_{res}).

En la Figura 8 se presenta la cuarta iteración del

ejemplo, en donde se ha producido un retroceso de flujo en la actividad 2-3. En el primer cálculo de T_t del nodo 2 (cruzado con una línea diagonal) se consideró que la actividad 1-2 podría tomar su T_{min} (1); sin embargo como el T_t del nodo 3 fue 2, la actividad 2-3 tendría una holgura de 1, lo cual no es posible pues tiene flujo asignado (2), por lo que es crítica. Por lo tanto se recalculó su T_t y F (ambos resultaron con valor 2), lo cual produjo un retroceso de agua del nodo 3 al 2. El F_{max} de la red fue 2, y será el flujo que se haga correr en sentido normal por las actividades 1-3 y 2-4, y en sentido inverso por la 2-3, antes de iniciar la quinta iteración.

El resultado de la cuarta iteración fue la disminución de las actividades 1-2 y 1-3 en 1 unidad (ambas de 3 a 2), la 2-4 y 3-4 en 2 unidades (ambas de 5 a 3); y una disminución del proyecto en 3 unidades (de 8 a 5). El sobrecosto asociado es de 12 (calculado como $3 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 2 + 3 \times 2$). El flujo acumulado (F_A) que se ha hecho correr en el sistema, hasta esta iteración, es 4. El sobrecosto también se puede calcular como $4 (F_A)$ por 3 (disminución de la duración de 8 a 5).

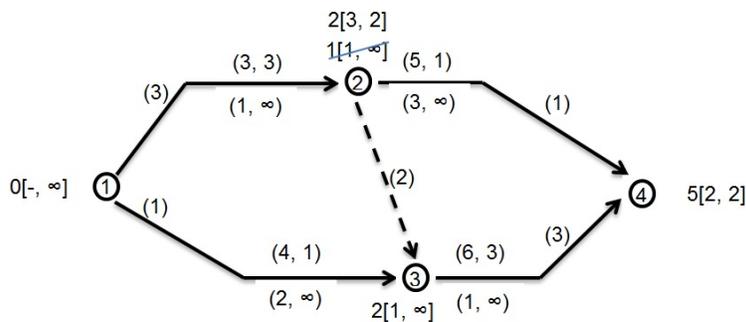


Figura 8. Retroceso de flujo en la cuarta iteración del ejemplo.

E) TERMINACIÓN DEL MÉTODO

Se habrá comprimido la red a su menor duración posible cuando el F_{max} calculado en una iteración sea infinito; esto ocurrirá cuando todas las actividades de al menos una ruta crítica hayan llenado sus tubos normales. En el caso especial de una actividad con varios segmentos, se deberá haber llenado su tubo normal y sus tubos adicionales.

La duración comprimida de la red a su menor tiempo posible corresponde al T_t calculado para el nodo final de la red en esa última iteración. El sobrecosto total por comprimir la red se obtiene de la suma de los sobrecostos de todas las iteraciones. Los resultados de las sucesivas iteraciones permitirán trazar una curva tiempo-sobrecosto para el proyecto.

Si durante la aplicación del método se cometen errores aritméticos se obtendrán puntos –con tiempo y

sobrecosto– que podrían estar fuera de la curva anteriormente mencionada. Sin embargo, si se continúa con su aplicación, el método es capaz de volver obtener puntos correctos que pertenezcan a esa a curva, hasta llegar a la menor duración posible del proyecto, siempre que no se sigan infringiendo las reglas básicas del método.

En la Figura 9 se presenta la quinta y última iteración del ejemplo. En la actividad 2-4 se ha anotado debajo de la parte oblicua de su flecha el flujo que se asignó a su tubo límite (2). La actividad ficticia 2-3 dejó de ser crítica, debido a que el retroceso de flujo que tuvo hizo que dejara de conducir agua; es importante hacer notar que únicamente las actividades ficticias pueden dejar de ser críticas, durante la aplicación del método.

Se puede observar que todas las actividades críticas ya han llenado sus tubos normales. El F_{max} del nudo final es ∞ , lo cual significa que cualquier flujo

adicional que se vertiera al sistema tendría que correr por los tubos límite de las actividades; lo anterior provocaría sobrecostos sin límite (∞), pero sin disminución de tiempo.

El resultado de la quinta iteración fue la disminución de las actividades 1-2 y 3-4 en 1 unidad (de 2 a 1 y

de 3 a 2, respectivamente); y la disminución del proyecto, también en 1 unidad (de 5 a 4 unidades). El sobrecosto asociado es de 6 (calculado como $3 \times 1 + 3 \times 1$). El flujo acumulado (F_A) que se hizo correr en el sistema fue 6. El mismo sobrecosto también se puede calcular como 6 (F_A) por 1 (disminución de la duración de 5 a 4).

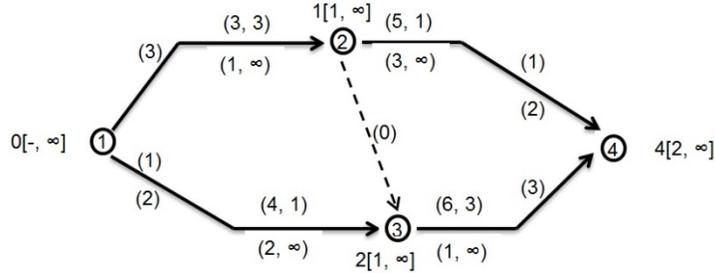


Figura 9. Quinta iteración del ejemplo.

En la Tabla 3 se presentan las duraciones, flujos y sobrecostos que se fueron calculando en cada iteración para el ejemplo desarrollado. Como se ha explicado anteriormente el SC asociado a cada compresión de la red se calcula por medio de la Ecuación 1 y también se puede calcular por medio del producto del F_A por la disminución de la duración del tiempo proyecto en esa iteración. Es importante recordar que el F_A en cuestión es el que está corriendo por la red y corresponde al calculado en la iteración anterior. Por ejemplo, el SC asociado a la compresión

del proyecto de 8 a 5 unidades se obtiene del producto del F_A de 4 por las 3 unidades de tiempo disminuido.

Es conveniente calcular el SC por medio de las dos formas, para comprobar que no se ha incurrido en errores. Por ejemplo, si se omite el recálculo requerido para evitar holuras aparentes (retroceso de flujo) se obtendrán dos valores diferentes de SC; en este caso se deberá revisar los cálculos de la iteración respectiva.

Tabla 3. Duración, flujos y sobrecostos del proyecto del ejemplo.

Actividad	Q	Duración (T_t del nodo final)				
		10	9	8	5	4
1-2	3	3	3	3	2	1
1-3	1	4	3	3	2	2
2-3	0	0	0	0	0	0
2-4	1	5	5	5	3	3
3-4	3	6	6	5	3	2
F_{max}		1	2	1	2	∞
F_A		1	3	4	6	
SC		-	1	3	12	6
SC acumulado		-	1	4	16	22

En la Figura 10 se presenta la gráfica de tiempo-sobrecosto que se generó para el ejemplo desarrollado. El costo directo total del proyecto

asociado a cada punto de la gráfica se puede calcular por medio de la suma del costo normal y el sobrecosto acumulado correspondiente a cada duración.

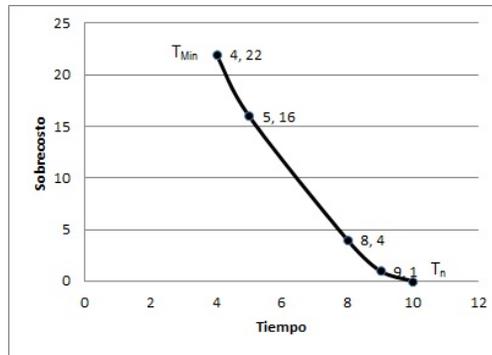


Figura 10. Gráfico Tiempo vs. Sobrecosto (directo) del proyecto del ejemplo.

III.- CONCLUSIONES

El método de la analogía hidráulica es eficaz para resolver problemas en los que sea necesario comprimir una red que represente un programa de ejecución de un proyecto. El método es especialmente útil para la enseñanza de la programación y control de proyectos, debido a que utiliza un concepto físico, que resulta más fácil de comprender que el concepto abstracto de comprimir una red.

A partir de la definición de una función tiempo-costo para cada actividad, el método permite:

- Calcular el tiempo mínimo y su costo asociado, en el que se puede ejecutar el proyecto.
- Generar la curva tiempo vs. sobrecosto del

proyecto, partiendo del tiempo y costo normal, hasta el tiempo mínimo y costo máximo.

- Para cada punto de la curva tiempo vs. sobrecosto del proyecto, conocer el tiempo y costo de cada una de las actividades.

A diferencia de otros métodos en los que el programador tiene decidir cuál actividad comprimir y en qué medida hacerlo, tratando de mantener el proyecto con los menores sobrecostos posibles, con este método el algoritmo encuentra automáticamente la solución. Para esto es necesario cumplir estrictamente las reglas que se han explicado en este trabajo.

REFERENCIAS

- Ahn T. & Erenguc S. (1998). The resource constrained project scheduling problem with multiple crashable modes: a heuristic procedure. *European Journal of Operational Research*, 107(2), 250-259.
- Antill J. & Woodhead R. (1995). *Método de la ruta crítica y sus aplicaciones a la construcción*. Editorial Limusa.
- Buckmininster R. & Kuromiya K. (1982). *Critical Path*. 2nd edition, St. Martin's Griffin.
- Phillips Jr. S. (1977). Solving the project time/cost tradeoff problem in project networks. *European Journal of Operational Resarch*. 1 (6), 50-68.
- East W. (2015). *Critical Path Method (CPM) Tutor for Construction Planning and Scheduling*. 1st Edition McGraw-Hill Education.
- Elbeltagi E., Hegazy T., & Grierson D. (2005). Comparison among five evolutionary-based optimization algorithms. *Advanced engineering informatics*, 19(1), 43-53.
- Ford Jr., L; Fulkerson D. (1962). *Flows in Networks*. Princeton: Princeton University Press. 191 pp.
- Moder J. & Phillips C. (1970). *Project Management with CPM and PERT*. Van Nostrand Reinhold, New York.
- Serpell A., Alarcón L. (2001). *Planificación y control de Proyectos*. Segunda Edición, Ediciones Universidad Católica de Chile.

Solís y González / Ingeniería 21-1 (2017) 41-53

Solís R., Martínez J. & González J. (2009). Estudio de caso: demoras en la construcción de un proyecto en México. Ingeniería, Revista Académica, 13 (1), 41-48. <http://www.redalyc.org/pdf/467/46713055004.pdf>
Thomas H. & Yiakoumis I. (1987). Factor model construction productivity. Journal of construction engineering and management. 113(4), 623-639.

Weber S. (2005). Scheduling Construction Projects: Principles and Practices. Prentice Hall.

Este documento debe citarse como: Solís Carcaño, R. y González Fajardo, J. A. (2017). **Analogía hidráulica para la compresión de redes en la planeación de proyectos**. Ingeniería, Revista Académica de la FI-UADY, 21-1, pp. 41-53