

Integrando calor y electricidad en la enseñanza de la física

E. N. Miranda¹, S. Nikolskaia, R. Riba, E. Antonio

Fecha de recepción: 6 de diciembre de 2006 – Fecha de aceptación: 5 de septiembre de 2007

Resumen

Se presenta un experimento sencillo que puede implementarse en un curso de física general y que utiliza conceptos de electricidad y termodinámica. El objetivo es obtener la curva de intensidad vs. voltaje en un circuito que contiene una fuente de tensión variable y una bombilla eléctrica. Se realiza un balance energético entre el calor que gana el filamento por efecto Joule y el que pierde por radiación. Eso conduce a escribir una ecuación diferencial no lineal que se resuelve con métodos numéricos. Esta ecuación muestra un lazo de histéresis para ciertos casos de variación temporal del voltaje. Al implementar el experimento para esas condiciones se encuentra un buen acuerdo con la teoría.

Palabras clave: termodinámica, calor, histéresis

Integrating heat and electricity in the teaching of Physics

Abstract

A simple experiment suitable for an undergraduate general physics lab is shown. The student should only know some basic concepts of electricity and thermodynamics for understanding the experience. The aim is to measure the current intensity in a circuit with a variable voltage source and a light bulb. The bulb filament gains energy due to Joule heating and losses it due to radiation. An energy balance leads to a non-linear differential equation that is solved numerically. This equation shows a hysteresis loop if the voltage changes with time in a special way. The experimental results agree well with the theoretical predictions.

Keywords: thermodynamics, heat, hysteresis

¹ Profesor-Investigador, Facultad de Ingeniería, Universidad de Mendoza; Mendoza, Argentina; E-mail: emiranda@lab.cricyt.edu.ar

Introducción

En los cursos de física general es usual enseñar diversos tópicos en forma separada. Así se explican conceptos de electricidad y magnetismo por un lado, y por otro se enseña calor y termodinámica. Resulta difícil encontrar problemas y experimentos que integren diversos tópicos y que sean suficientemente sencillos como para ser comprendidos por los estudiantes. En este artículo se propone un problema y una experiencia de laboratorio que integra la ley de Ohm con algunos conceptos de calor y termodinámica. El nivel de física requerido para comprender este trabajo es el brindado por un buen texto de física general [Resnick et al. 2003; Serway et al. 2004]. Para reproducir los resultados numéricos, es necesario estar familiarizado con algoritmos comunes de resolución de ecuaciones diferenciales [Burden et al. 2003]. Las tareas reportadas en este trabajo se han llevado a cabo en el marco de la cátedra de Física General de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Mendoza (Argentina).

El concepto central de este trabajo es el de histéresis. Como se sabe, un sistema presenta tal propiedad cuando tiene memoria del camino recorrido. El caso típico que se estudia en los cursos de Física General es el de los materiales magnéticos: cuando se aplica un cierto campo magnético a una de tales sustancias,

la inducción magnética resultante toma distintos valores dependiendo de la historia previa de la muestra [Resnick et al. 2003; Serway et al. 2004]. Además de este caso, se suele comentar brevemente el caso de los materiales que al ser sometidos a tensión se deforman al punto de entrar en la región plástica. En tal circunstancia, al disminuir la tensión, queda una deformación permanente en la muestra, es decir, “recuerda” su historia.

Todos los ejemplos mencionados adolecen del defecto de ser puramente descriptivos, no pudiéndose inferir la existencia de la histéresis a partir de otras leyes físicas conocidas por los estudiantes. De ahí el interés del caso aquí presentado: la existencia de un lazo de histéresis resulta de la aplicación de leyes que se enseñan en un curso de Física General.

Problema y metodología

El problema a estudiar está descrito en la Figura 1. Se tiene una fuente de tensión variable $V(t)$ y una bombilla común; el objetivo es determinar la intensidad $I(t)$ que circula por el circuito. El problema no es trivial ya que eligiendo adecuadamente $V(t)$ se pueden observar un lazo de histéresis. Para fijar ideas supongamos que $V(t)$ tiene forma de una onda triangular.

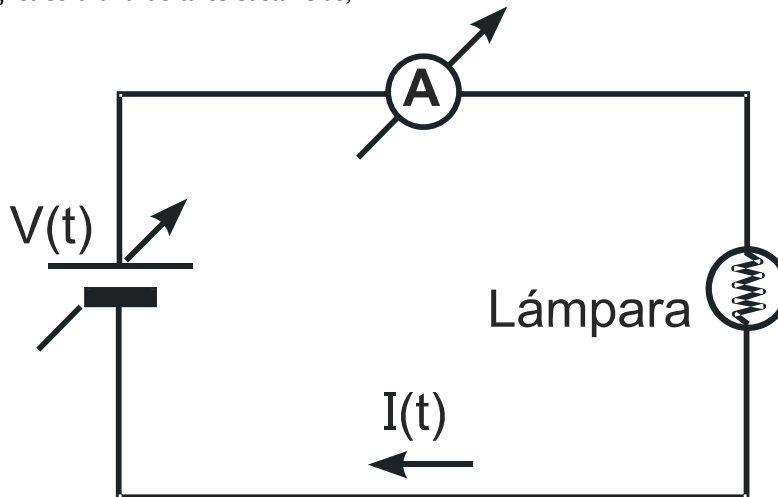


Figura 1: Este es el problema estudiado en el presente trabajo. Una fuente de tensión variable genera una intensidad de corriente que presenta histéresis debido a la inercia térmica del filamento de la lámpara

Entonces, para un cierto valor V_1 del potencial en la parte creciente de la onda, se obtiene una cierta intensidad I_1 . Haciendo que la tensión se incremente rápidamente se consigue que el filamento esté relativamente frío en ese momento y presente una cierta resistencia R_1 . Posteriormente, en la parte decreciente de la onda, para el mismo valor de

potencial V_1 , el filamento está más caliente. Por lo tanto su resistencia ha aumentado a un valor $R_2 > R_1$ y en consecuencia la intensidad I_2 que circula por el circuito resulta menor que I_1 . Vemos así que el sistema va a presentar histéresis si se elige adecuadamente la variación temporal de la tensión.

A continuación vamos a poner en términos matemáticos las consideraciones anteriores y obtendremos una ecuación diferencial no-lineal. Mostraremos algunas soluciones numéricas de la misma que confirman las intuiciones anteriores y finalmente veremos el experimento llevado a cabo.

Si $\rho(T)$ es la resistividad del tungsteno que depende de la temperatura absoluta T , L es la longitud del filamento, S la sección transversal del mismo y r el radio, entonces podemos escribir la resistencia del filamento como sigue:

$$R(T) = \frac{\rho(T)L}{S} = \frac{\rho(T)L}{\pi r^2} \quad (1)$$

Por otra parte, si $c(T)$ es el calor específico del tungsteno y δ la densidad, entonces podemos escribir la capacidad calórica C del filamento como:

$$C(T) = c(T)\delta LS = \pi r^2 L \delta c(T) \quad (2)$$

Nuestro próximo paso es hacer el balance calórico del sistema. El filamento recibe calor debido al efecto Joule y pierde debido a radiación, convección y conducción. Los tres mecanismos están presentes, sin embargo el más relevante es la pérdida por radiación; de ahí que los otros dos se desprecian en nuestro análisis. Así, escribimos el calor dQ/dt que gana (o pierde) el filamento por unidad de tiempo como:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{V^2(t)}{R(T)} - e\sigma AT^4 \quad (3)$$

El primer término de (3) es el calor ganado por efecto Joule; notar que la dependencia de la tensión con el tiempo aparece explícitamente. El segundo término es el calor perdido por radiación: e es la constante de Stephan – Boltzmann, σ la emisividad del tungsteno y A el área radiante. Teniendo en cuenta la forma helicoidal del filamento, resulta difícil estimar con exactitud tal área. Se va a suponer que toda la superficie del filamento radía como si se tratara de un cilindro recto. Entonces resulta:

$$A = 2\pi rL \quad (4)$$

Ahora analizaremos el término de la izquierda en (3). El calor recibido o entregado por el filamento se traduce en un cambio de temperatura de acuerdo a:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= C \frac{dT}{dt} \\ &= c(T)LS\delta \frac{dT}{dt} \\ &= c(T)L\pi r^2\delta \frac{dT}{dt} \end{aligned} \quad (5)$$

Teniendo en cuenta las expresiones anteriores, podemos escribir la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{V^2(t)}{\rho(T)c(T)L^2\delta} - \frac{2e\sigma T^4}{c(T)r\delta} \quad (6)$$

La ecuación (6) es el modelo matemático de nuestro problema. Nos da la evolución temporal de la temperatura en función de los parámetros geométricos del filamento (r , L), la variación en el tiempo del voltaje ($V(t)$) y las propiedades físicas del tungsteno (σ , δ , ρ , c) que son función de la temperatura. Estas magnitudes se encuentran tabuladas [Lide, 2003].

Conocido el valor de la temperatura $T(t)$, entonces se puede inferir la resistencia $R(t)$ que presenta el filamento y puesto que se conoce el valor de la tensión $V(t)$, se puede predecir la intensidad $I(t)$ que circulará por el circuito. Se obtiene así una curva V vs. I predicha teóricamente. Y resulta sencillo obtener la misma curva experimentalmente.

Para poder resolver la ec. (6) hay que conocer la forma funcional de $c(T)$ y $\rho(T)$. Para ello se ajustan por mínimos cuadrados los datos tabulados de tales magnitudes [Lide 2003]. Se encuentra que un polinomio ajusta correctamente tales datos. Por lo tanto, las formas funcionales que se usan son:

$$\begin{aligned} \rho(T) &= -2.797 + 0.0259T + 1.89 \times 10^{-6} T^2 \\ c(T) &= 6.02 - 3.18 \times 10^{-4} T + 7.85 \times 10^{-7} T^2 - \\ &\quad - 1.1 \times 10^{-10} T^3 \end{aligned} \quad (7)$$

Si bien la emisividad σ y la densidad δ varían con la temperatura, tal cambio es pequeño por lo cual se consideran como constantes. Hay que hacer notar que las dimensiones geométricas del filamento (r , L) no son conocidas. Por lo tanto se toman como parámetros libres del modelo y se ajustan a partir de los datos experimentales.

En cuanto a la variación temporal del voltaje, este tiene la forma de una onda triangular, caracterizada por un cierto periodo t .

Para resolver la ec. (6) se implementó el algoritmo de Runge-Kutta de 4^{to} orden. Los detalles del mismo pueden encontrarse en cualquier referencia sobre cálculo numérico [Burden et al. 2003].

Resultados y discusión

En la Figura 2 se muestran algunos resultados obtenidos con el programa para distintos periodos t de

la función de onda triangular. Puesto que el radio y la longitud del filamento son desconocidos, se les asignan valores arbitrarios. La intensidad se calcula de la siguiente manera. Conociendo la temperatura T se puede conocer la resistencia total $R(T)$ y en consecuencia se puede inferir la intensidad I como: $I = V/R$. De la figura 2 resulta claro que si el voltaje cambia muy rápido, la temperatura del filamento no puede cambiar tan velozmente debido a la inercia térmica. En consecuencia aparece un lazo histéresis.

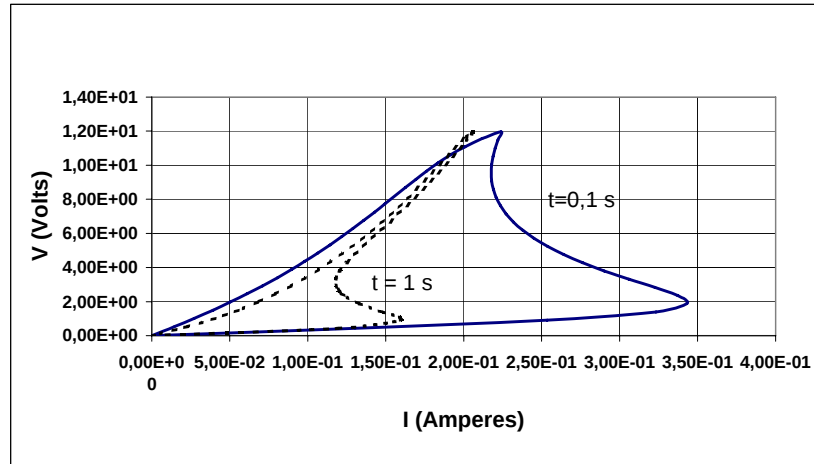


Figura 2: Resultados de resolver numéricamente la ecuación (6) para distintos periodos t de la onda de tensión. Como se ve, si el periodo es corto, la temperatura del filamento no puede seguir la variación de la tensión y aparece un lazo de histéresis. Se han tomado valores arbitrarios para la geometría del filamento.

Resumiendo lo hecho hasta aquí, hemos visto en los primeros párrafos mediante un razonamiento cualitativo, que para ciertas condiciones, un filamento debe presentar histéresis. Posteriormente hicimos un modelo matemático que al ser resuelto numéricamente confirmó la existencia de tal lazo de histéresis. Nuestro próximo paso es realizar el experimento respectivo.

Para verificar empíricamente lo que predice la teoría, se implementó en el laboratorio de electrónica de la Universidad de Mendoza el dispositivo experimental que se muestra en la Figura 3. Los equipos empleados son usuales y todos se encuentran disponibles en la Facultad de Ingeniería. En particular se utilizó un osciloscopio con capacidad para graficar lo mostrado en pantalla.

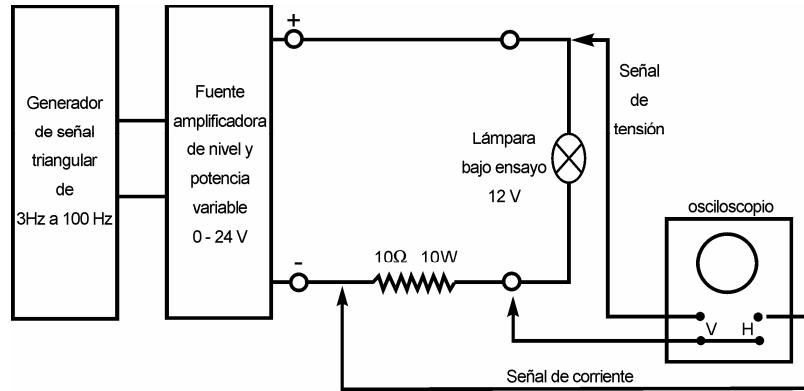


Figura 3: Disposición experimental para medir el lazo de histéresis predicho por el modelo teórico

En la Figura 4 (lado izquierdo) se muestra una imagen típica obtenida experimentalmente. Como se puede apreciar, se encontró el lazo de histéresis previsto por la teoría. Esos datos fueron obtenidos con una señal triangular de 12 V de amplitud y 0.1 s de periodo.

En nuestro modelo matemático hay dos parámetros que no conocemos y que son las dimensiones geométricas del filamento. En efecto, el radio y la

longitud del mismo no se pueden medir. Por lo tanto, hay que explorar distintos valores de r y L hasta obtener un resultado numérico que ajuste lo observado empíricamente. Esto es sencillo de realizar ya que se tiene el código computacional respectivo. En la Figura 4 (lado derecho) se muestra el resultado teórico para $r = 8 \times 10^{-4}$ m y $L = 8 \times 10^{-2}$ m. Como puede verse, el acuerdo con el resultado experimental es muy bueno.

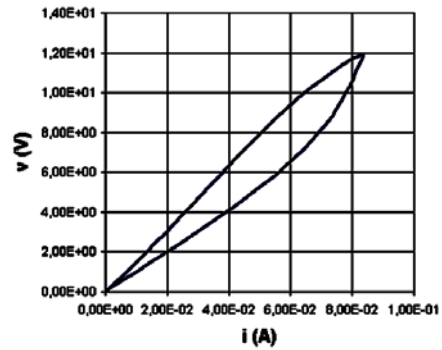
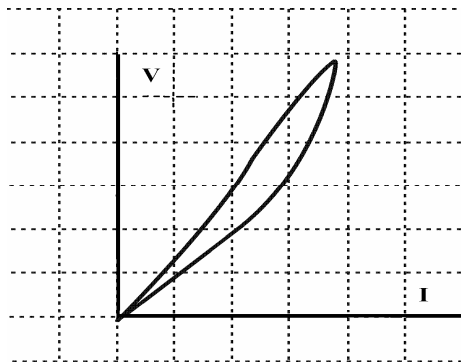


Figura 4: A la izquierda se muestra una curva experimental típica obtenida en el laboratorio. El eje de las abscisas corresponde a la intensidad; cada división corresponde a 0.2 mA. El eje de las ordenadas es la tensión; cada división representa 2 V. El origen de coordenadas corresponde al punto inferior izquierdo de la curva. Hay que notar que esta gráfica corresponde a una fotografía de lo mostrado por el osciloscopio, de ahí que no aparezcan unidades ni datos de la escala.

A la derecha se muestra el resultado teórico predicho por nuestro modelo cuando la señal de tensión tiene un máximo de 12 V y un periodo de 0.1 s. El radio y la longitud del filamento se han ajustado con los datos experimentales. El acuerdo con el resultado experimental es muy bueno.

Experimentalmente se comprobó que al acercarse el periodo a $t = 0.02$ s, es decir a una frecuencia de 50 Hz, la respuesta del filamento es lineal. Vale decir, para la frecuencia usual de trabajo, desaparece el fenómeno de la histéresis y el filamento se comporta como una resistencia óhmica ordinaria. Para esa

frecuencia, la temperatura del filamento no tiene posibilidades de variar temporalmente y toma un valor constante.

Hay que hacer notar que el resultado encontrado parecería contradecir el mostrado en la Figura 2: ahí

al aumentar la frecuencia, aumenta la histéresis. Sin embargo, no hay contradicción ya que los datos de esa figura se obtuvieron utilizando parámetros arbitrarios –es decir, no físicos- al resolver la ecuación (6). El objetivo ahí es simplemente mostrar que dicha ecuación no lineal presenta, bajo ciertas circunstancias, un lazo de histéresis.

Conclusión

En síntesis, en este trabajo se han unido dos tópicos que habitualmente se enseñan por separado, esto es termodinámica y electricidad. Se ha hecho un análisis cualitativo del problema que puede ser

comprendido por cualquier estudiante de Física General. Posteriormente se planteó un modelo matemático que conduce a una ecuación no lineal, la que puede ser resuelta apelando a métodos enseñados en un curso de Cálculo Numérico. Finalmente las predicciones del modelo fueron verificadas experimentalmente utilizando material disponible cualquier facultad de Ingeniería.

Agradecimientos:

E. N. Miranda agradece al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) por el apoyo financiero.

Referencias bibliográficas

Burden, R. L.; Faires, D., (2003). *Análisis Numérico*; Thomson International.

Lide, D. R. ed. (2003). *CRC Handbook of Chemistry and Physics*; CRC Press, 84th ed.

Resnick, R.; Halliday, D.; Krane, K. S. (2003). *Física*; CECSA, 5^a edición,

Serway, R. A.; Jewet, J. (2004). *Física*; Thomson International, 3^{ra} edición.

Este documento se debe citar como:

E. N. Miranda, S. Nikolskaia, R. Riba, E. Antonio. (2007). **Integrando calor y electricidad en la enseñanza de la física**. Ingeniería, Revista Académica de la FI-UADY, 11-3, pp.15-20, ISSN: 1665-529X