

# Técnica de Estimación Paramétrica Aplicada a un Motor de CD Vía Series Walsh

Isidro I. Lázaro C.<sup>1</sup>, David Roman M.<sup>1</sup>, Juan Anzures M.<sup>1</sup> y Nun Pitalúa D.<sup>2</sup>

*Fecha de recepción: agosto de 2008 – Fecha de aceptación: mayo de 2009*

## RESUMEN

En este artículo se presenta un método para realizar una estimación paramétrica de un Sistema Lineal Invariante en el Tiempo (SLIT). La metodología aprovecha las bondades de las propiedades operacionales disponibles para la mayoría de las series ortogonales tales como, la matriz de Integración Producto y de Coeficientes. Un aspecto importante de esta aproximación es que se obtiene una expresión analítica. El caso de estudio que se presenta es un motor de CD controlado por armadura, el cual se analiza por medio de la metodología propuesta usando como serie ortogonal las series Walsh. La técnica provee un excelente resultado sin mucho esfuerzo computacional.

**Palabras Clave:** Identificación Paramétrica, Matriz Operacional, Redundancia Analítica y Series Walsh.

# Parametric Estimation Technique Applied To Dc Motor Via Walsh Series

## ABSTRACT

In this paper a method to carry out parametric estimation time invariant systems is proposed. This methodology exploits advantages of the operational properties available at most orthogonal series such as Integration, Product and Coefficient matrices. Closed-form analytical expressions are provided for parametric identification, which represents a key feature of this approach. A DC motor is presented as a test case and analyzed via the proposed methodology using Walsh series. This method provides excellent results with a minimum computational effort.

**Keywords:** Identification, Operational Matrix, Analytical Redundancy and Walsh Series.

---

<sup>1</sup> Profesor Investigador. Facultad de Ingeniería Eléctrica, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, E-mail: [ilazaro@umich.mx](mailto:ilazaro@umich.mx), [janzures@umich.mx](mailto:janzures@umich.mx).

<sup>2</sup> Profesor Investigador. Facultad de Ingeniería Industrial, Universidad de Sonora, Campus Hermosillo, E-mail: [nun\\_pitalua@hotmail.com](mailto:nun_pitalua@hotmail.com)

## **INTRODUCCIÓN**

En las últimas décadas el funcionamiento de los procesos industriales ha cambiado drásticamente, esto se debe principalmente a la incorporación de la computadora como elemento de control y a su evolución, esto ha permitido que la automatización de procesos permita incrementar la productividad de algunos sectores industriales.

Para aumentar la competitividad ha sido necesario desarrollar nuevas técnicas: métodos y herramientas que permitan maximizar la eficiencia de los procesos, desarrollando controladores de gran calidad, y maximizar la eficiencia de los procesos con el menor ajuste de la máquina. Para ello es imprescindible conocer el comportamiento dinámico del proceso, principalmente de las partes críticas. Por esta razón es vital contar con técnicas eficientes de identificación que permitan obtener los parámetros del modelo de un sistema (Fossois y Rivera, 2007).

Se denomina identificación a la técnica de construir un modelo a partir de las variables medidas del proceso: entradas o variables de control, salidas o variables controladas y perturbaciones. El enfoque de la identificación se puede realizar en función de la estructura del modelo, y del comportamiento físico o no del mismo, dentro de esto se puede distinguir:

Caja negra.- Cuando los parámetros del modelo no tienen una interpretación física.

Caja gris.- Si algunas partes del sistema son modeladas basadas en principios fundamentales y otras como una caja negra.

Caja blanca.- La estructura del modelo se obtiene a partir de las leyes fundamentales. Los parámetros tienen una interpretación física.

Existiendo además varias formas de catalogar los modelos matemáticos:

1.- Modelos no paramétricos: Estos se caracterizan mediante gráficos, diagramas o representaciones que describen las propiedades dinámicas mediante un número no finito de parámetros, dentro de estas técnicas están: la respuesta al impulso, al escalón y a la frecuencia.

2.- Modelos paramétricos: Describen las relaciones entre las variables del sistema mediante expresiones matemáticas, es decir, con ecuaciones diferenciales en sistemas continuos y ecuaciones de diferencias en sistemas discretos.

Existe un interés práctico en la identificación de sistemas por el manejo de las dificultades asociadas con la derivación de los modelos a partir de los principios físicos, en donde es frecuente la aplicación de técnicas de identificación para estimar los parámetros del mismo. Entre las diversas técnicas paramétricas en (Avilés et al., 2002) se encuentra una revisión de las principales técnicas aplicadas a Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (SLIT), en donde a partir de la respuesta en lazo abierto del sistema se obtiene una aproximación del mismo a uno de orden reducido (primero o segundo orden).

Otros esfuerzos se han encaminado a extender los métodos clásicos dados por Ziegler-Nichols, en (Jurié y Perunicic, 2004) se propone dicha extensión a sistemas con retardo. Por otro lado, el uso de las series ortogonales aplicadas al análisis de sistemas ha recibido una atención considerable al emplearse en varios problemas tales como el análisis, estimación de parámetros y control óptimo. Ejemplos típicos de aplicaciones se pueden encontrar en (Chen y Hsiao, 1975; Chen y Tsay, 1977; Cheng-Chiian y Yen-Ping, 1983; Samavat y Rashidie, 1995; Rico et al., 2001; Lázaro et al., 2008), en donde las matrices operacionales juegan un papel importante en la transformación de una ecuación diferencial lineal en ecuaciones algebraicas. Por ejemplo, una ecuación diferencial lineal con coeficientes variantes o invariantes en el tiempo puede ser transformada en un conjunto de ecuaciones algebraicas vía matriz operacional de integración.

En este artículo la matriz operacional de integración, la matriz producto y la matriz de coeficientes para las series ortogonales, permiten desarrollar una técnica para la identificación fuera de línea de parámetros de SLIT, la obtención del modelo se basa en el enfoque de la caja blanca.

Aunque la solución es esencialmente la misma en todos los dominios, las características de las matrices intermedias que son empleadas son usualmente diferentes. Ejemplos de ello son la aplicación de los polinomios de Chebyshev de primer y segundo tipo, series de Fourier, series Walsh, series de Bloques de Pulso, series Hartley y series Haar. Como caso particular se emplean las series Walsh para mostrar la aplicación de la técnica en la identificación de parámetros de un SLIT. Los resultados de la técnica desarrollada se muestran a través de simulaciones realizadas en la plataforma de Matlab.

El método utiliza el cálculo de la pseudoinversa en la solución de los parámetros estimados, así como la redundancia analítica, es decir la posibilidad de realizar varios experimentos sobre el sistema al cual se está identificando. La principal ventaja de esta técnica es que puede extenderse a Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo de cualquier orden, además de que puede emplearse a cualquier sistema cuyo modelo sea conocido aplicando algunas de las series ortogonales para obtener la estimación paramétrica.

**METODOLOGÍA**

**Propiedades Del Cálculo Operacional Y Expansión En Series Ortogonales.** Los métodos algebraicos para la solución de problemas descritos por ecuaciones lineales diferenciales, tales como identificación de sistemas, análisis, control y reducción de modelos han sido propuestos recientemente. Los métodos algebraicos también han sido utilizados para obtener la solución de estado estable de sistemas lineales invariantes en el tiempo, sistemas periódicos y no lineales. Estos métodos algebraicos proporcionan soluciones idénticas pero poseen diferentes propiedades numéricas. En estos métodos, la integración numérica de las ecuaciones diferenciales se basa en la expansión de funciones en series ortogonales, en donde la idea básica consiste en convertir la ecuación integral en una algebraica usando la matriz de integración.

**Series Walsh**

Desde que Corrington construyó las tablas Walsh para resolver ecuaciones diferenciales de orden superior (Chen y Hsiao, 1975), desarrollaron la matriz operacional Walsh para resolver ecuaciones de estado, el método operacional Walsh ha sido aplicado satisfactoriamente para resolver problemas tales como la síntesis en el dominio del tiempo en teoría de sistemas; así como la determinación de ganancias en control óptimo, el método directo de solución del problema variacional y la estimación paramétrica de sistemas (Lazaro et al., 2008). Las funciones Walsh  $\phi_i(t)$  son un conjunto de ondas cuadradas las cuales son ortonormales. La Figura 1 muestra las funciones de  $\phi_0(t)$  a  $\phi_7(t)$  en el orden bivalente, las cuales pueden definirse a partir de las funciones de Rademacher.

Una función arbitraria  $f(t)$  se puede aproximar en Series Walsh, si la función es absolutamente integrable en  $[0,1]$ , como sigue (Chen y Hsiao, 1975; Chen y Tsay, 1977; Datta y Mohan, 1995):

$$f(t) = c_0\phi_0(t) + c_1(t)\phi_1(t) + c_2(t)\phi_2(t) + \dots + c_m\phi_m(t) + \dots \quad (1)$$

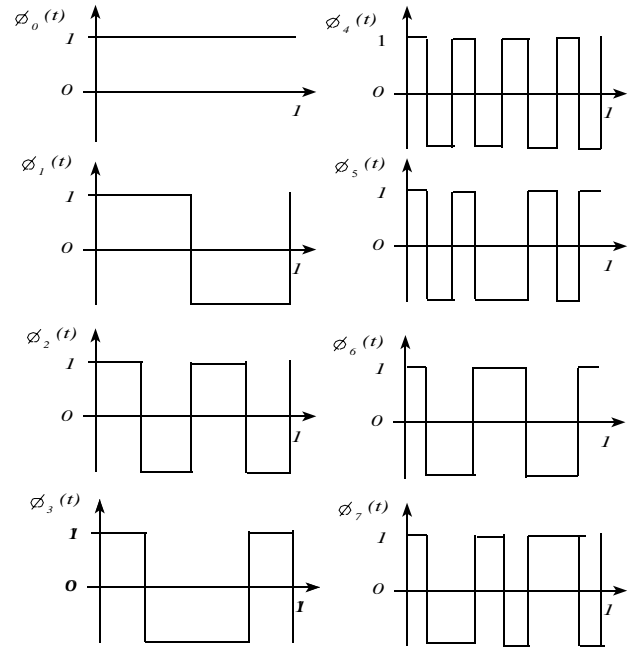


Figura 1. Funciones Walsh.

o

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \phi_m(t) = c^t \Phi(t) \quad (2)$$

donde

$$c^t = [c_0 \quad c_1 \quad \dots \quad c_{m-1}] \quad (3)$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_m \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4)$$

y  $c_m$  se denominan coeficientes de la serie Walsh y se determinan de manera que la siguiente integral del error cuadrático es minimizada.

$$\varepsilon = \int_0^1 \left[ f(t) - \sum_{m=0}^{\infty} c_m \phi_m(t) \right]^2 dt \quad (5)$$

aplicando el límite

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 \left[ f(t) - \sum_{m=0}^{\infty} c_m \phi_m(t) \right]^2 dt = 0 \quad (6)$$

resolviendo se tiene

$$c_m = \int_0^1 \phi_m(t) f(t) dt \quad (7)$$

**Matriz Operacional de Integración.** Debido a que las funciones de Walsh son un conjunto de ondas rectangulares, sus integrales son

computacional y su dimensión depende del número de componentes elegidos. La Ecuación (9) es una fórmula aproximada, su aproximación depende de la

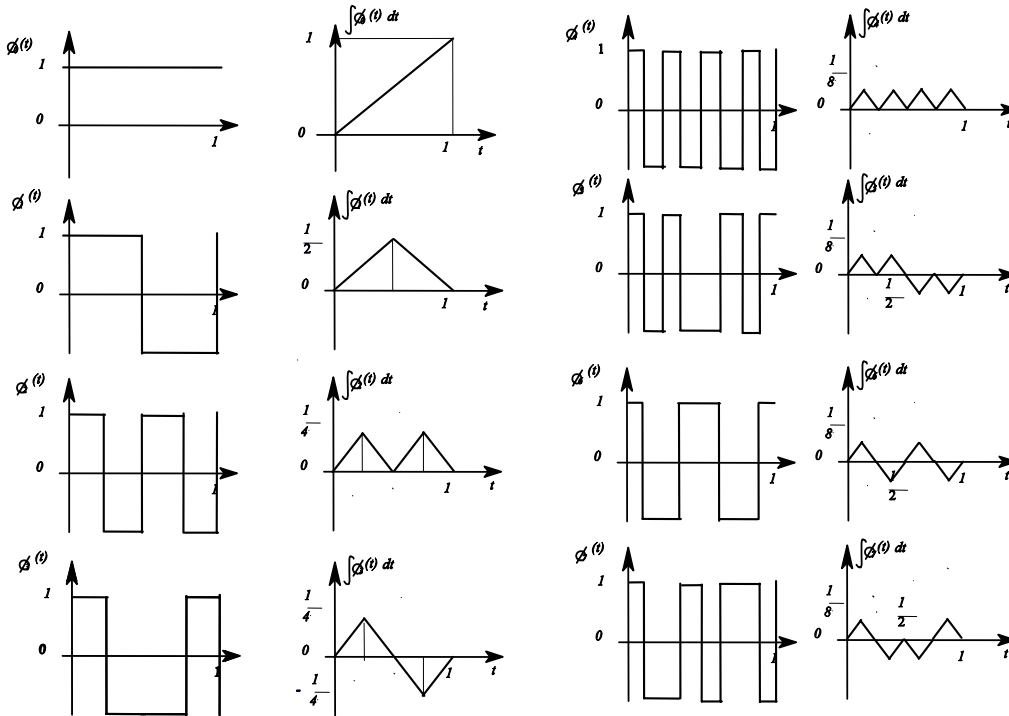


Figura 2. Primeras 8 funciones de Walsh y sus integrales.

ondas triangulares, la Figura 2 muestra la integral de las primeras 8 funciones de Walsh. La integral de las funciones Walsh puede ser expresada en funciones Walsh y cada una de ellas puede ser evaluada. Por lo tanto, podemos escribir la relación entre las funciones Walsh y sus integrales de forma matricial.

Para el caso de cuatro funciones Walsh se tiene:

$$\begin{bmatrix} \int \phi_0(t) dt \\ \int \phi_1(t) dt \\ \int \phi_2(t) dt \\ \int \phi_3(t) dt \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_0(t) \\ \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \phi_3(t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

o bien en forma compacta

$$\int \phi_4(t) dt \cong P_{4 \times 4} \Phi_{4 \times 1}(t) \quad (9)$$

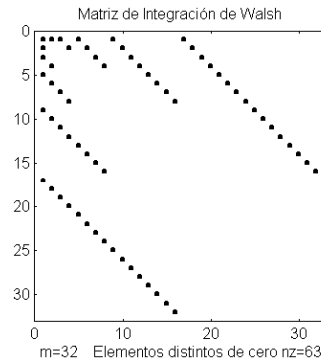
donde

$P$ - Matriz operacional de integración

$P$  relaciona las funciones Walsh y sus integrales, se escoge como una matriz cuadrada por conveniencia

El subíndice indica la dimensión tomada, es preferible tomar  $2^\Omega$ , donde  $\Omega$  es un entero. Siguiendo un razonamiento similar se puede derivar una matriz de integración de mayor orden. La Ecuación (10) muestra el caso general de la matriz  $P$ . La matriz operacional anterior realiza la integración para operaciones con enteros. Por lo tanto puede usarse para resolver ecuaciones diferenciales lineales de manera efectiva.

La Figura 3 muestra la estructura de una matriz de integración cuyo orden es de  $32 \times 32$  en donde se puede apreciar claramente la dispersidad de ésta (63 términos de la matriz son distintos de cero).



**Figura 3.** Estructura de la matriz de integración de Walsh para m=32.

$$P_{(m \times m)} \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \vdots & -\frac{2}{m}I_{\left(\frac{m}{8}\right)} & \vdots & -\frac{1}{m}I_{\left(\frac{m}{4}\right)} & \vdots & -\frac{1}{2m}I_{\left(\frac{m}{2}\right)} & \vdots & \dots \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ \frac{2}{m}I_{\left(\frac{m}{8}\right)} & \vdots & O_{\left(\frac{m}{8}\right)} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ \frac{1}{2}I_{\left(\frac{m}{4}\right)} & \vdots & \vdots & \vdots & O_{\left(\frac{m}{4}\right)} & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \frac{1}{2m}I_{\left(\frac{m}{2}\right)} & \vdots & \vdots & \vdots & O_{\left(\frac{m}{2}\right)} & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \quad (10)$$

Por otro lado, al producto de las funciones base multiplicado por su transpuesta se denomina Matriz Producto, para el caso de la 4 primeras funciones base tenemos,

$$\hat{\Pi}(t) = \begin{bmatrix} \phi_0(t) & \phi_1(t) & \vdots & \phi_2(t) & \phi_3(t) \\ \phi_1(t) & \phi_0(t) & \vdots & \phi_3(t) & \phi_2(t) \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ \phi_2(t) & \phi_3(t) & \vdots & \phi_0(t) & \phi_1(t) \\ \phi_3(t) & \phi_2(t) & \vdots & \phi_1(t) & \phi_0(t) \end{bmatrix} \quad (11)$$

Al multiplicar las primeras m funciones base podemos generalizar la matriz producto como:

$$\hat{\Pi}(t)_{m \times m} = \begin{bmatrix} \hat{\Phi}(t)_{\left(\frac{m}{2} \times \frac{m}{2}\right)} & \hat{\Phi}(t)_{+\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2} \times \frac{m}{2}\right)} \\ \hat{\Phi}(t)_{+\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2} \times \frac{m}{2}\right)} & \hat{\Phi}(t)_{\left(\frac{m}{2} \times \frac{m}{2}\right)} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Donde  $\hat{\Phi}(t)_{\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2} \times \frac{m}{2}\right)} = \hat{\Phi}(t)_{\left(\frac{m}{2} \times \frac{m}{2}\right)}$  con subíndice de cada elemento incrementado por  $\frac{m}{2}$ , tienen patrones bien definidos para su estructura.

La matriz de coeficientes es definida en términos de la matriz producto y el vector de series ortogonales base como una matriz que satisface,

$$[C]\Phi(t) = \Pi(t)c \quad (13)$$

Donde [C] es la matriz de coeficientes dado un vector c definido en la ecuación (3). Es interesante mencionar que la matriz producto y la de coeficientes son en realidad una propiedad que hace posible la solución analítica para sistemas variantes en el tiempo y que fueron encontradas por primera vez en el dominio de Walsh. Para el caso de 4 funciones base, la matriz de coeficientes toma la forma

$$[C]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \vdots & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_0 & \vdots & c_3 & c_2 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ c_2 & c_3 & \vdots & c_0 & c_1 \\ c_3 & c_2 & \vdots & c_1 & c_0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

y en general

$$C_{m \times m} = \begin{bmatrix} C_{\frac{m}{2} \times \frac{m}{2}} & C_{+\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2} \times \frac{m}{2}\right)} \\ C_{+\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2} \times \frac{m}{2}\right)} & C_{\frac{m}{2} \times \frac{m}{2}} \end{bmatrix} \quad (15)$$

**Estimación de Parámetros de SLIT y SLVT.**

Aunque el caso de estudio corresponde a un SLIT, esta clase de sistemas se consideran como un caso particular de los SLVT, por lo que se utilizará la metodología para este tipo de sistemas, de esta forma partiendo del sistema descrito por:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (16)$$

donde  $x(t) \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$  y  $u(t) \in \mathfrak{R}^{q \times 1}$  son los vectores de estado y entrada, respectivamente, y las matrices de coeficientes variantes  $A(t) \in \mathfrak{R}^{h \times nr}$  y  $B(t) \in \mathfrak{R}^{h \times qn}$ .

Utilizando aproximaciones vía series ortogonales las expresiones de los elementos  $a_{ij}(t)$  y  $b_{ij}(t)$  de las matrices  $A(t) \in \mathfrak{R}^{h \times nr}$  y  $B(t) \in \mathfrak{R}^{h \times qn}$  pueden ser expresados como (Lázaro et al., 2008):

$$a_{ij}(t) \cong A_{ij}^t \Phi(t) \quad (17)$$

$$b_{ij}(t) \cong B_{ij}^t \Phi(t) \quad (18)$$

Donde

$$A_{ij}^t = [A_{ij,0} \quad \dots \quad A_{ij,m}] \quad (19)$$

$$B_{ij}^t = [B_{ij,0} \quad \dots \quad B_{ij,m}] \quad (20)$$

Similarmente, los elementos del vector  $x(t) \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$  y  $u(t) \in \mathfrak{R}^{q \times 1}$  pueden ser aproximados como:

$$x_i(t) \cong X_i^t \Phi(t) \quad (21)$$

$$u_i(t) \cong U_i^t \Phi(t) \quad (22)$$

Teniendo esto presente el producto de las series ortogonales  $A(t)x(t)$  resulta:

$$A(t)x(t) = \begin{bmatrix} A'_{11}\Phi(t)X'_1\Phi(t) + \dots + A'_{1n}\Phi(t)X'_n\Phi(t) \\ A'_{21}\Phi(t)X'_1\Phi(t) + \dots + A'_{2n}\Phi(t)X'_n\Phi(t) \\ \vdots \\ A'_{n1}\Phi(t)X'_1\Phi(t) + \dots + A'_{nn}\Phi(t)X'_n\Phi(t) \end{bmatrix} \quad (23)$$

Tomando el factor  $A'_{ij}\Phi(t)X'_j(t)$ , donde cada producto  $A'_j\Phi(t)$  y  $X'_j\Phi(t)$  producen un escalar, por lo cual se puede reacomodar el producto como se muestra en la ecuación (24), al aplicar la transpuesta al término  $X'_j\Phi(t)$  y la definición de la Matriz Producto.

$$A'_{ij}\Phi(t)X'_j(t)\Phi(t) = A'_{ij}\Phi(t)\Phi'(t)X_j = A_{ij}[X_j]\Phi(t) \quad (24)$$

Donde  $[X_j] \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  es la matriz de coeficientes del vector  $x(t) \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$ . Ahora, reconstruyendo el producto  $A(t)x(t)$  se obtiene:

$$A(t)x(t) = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} & \dots & A'_{1n} \\ A'_{21} & A'_{22} & \dots & A'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A'_{n1} & A'_{n2} & \dots & A'_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [X_1] \\ [X_2] \\ \vdots \\ [X_n] \end{bmatrix} \Phi(t) \quad (25)$$

$$A(t)x(t) = A[X]\Phi(t) \quad (26)$$

donde  $[X_j]$  es la matriz de coeficientes correspondiente a cada vector de coeficientes,  $[X]$  es la matriz formada por todas la matrices de coeficientes  $[X_j]$ . Mientras que  $A$  es una matriz construida por cada vector de constantes  $A'_{ij}$ .  $\Phi(t)$  es el vector de funciones base.

De manera similar se puede demostrar que el producto  $B(t)u(t)$  se puede aproximar por.

$$B(t)u(t) = B[U]\Phi(t) \quad (27)$$

En donde las dimensiones de las matrices son  $B(t) \in \mathfrak{R}^{n \times q(m)}$ ,  $[U] \in \mathfrak{R}^{q(m \times m)}$  y  $\Phi(t) \in \mathfrak{R}^{(m \times 1)}$ .

Una vez obtenidos estos resultados es posible determinar una expresión para resolver el problema de la identificación. Integrando ambos lados de la ecuación (16), obtenemos:

$$x(t) - x_0(t) = A \int_0^t x(t)dt + B \int_0^t u(t)dt \quad (28)$$

Utilizando las propiedades de la matriz de integración y los resultados obtenidos en las ecuaciones (26) y (27), tenemos:

$$X\Phi(t) = X_0\Phi(t) + A[X]P\Phi(t) + B[U]P\Phi(t) \quad (29)$$

En la ecuación  $X_0$  es del mismo orden de  $X$  y contiene las condiciones iniciales de cada variable de estado, tal y como se muestra en la ecuación (30).

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) & 0 & \dots & 0 \\ x_2(0) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n(0) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Cancelando  $\Phi(t)$  en ambos lados de la ecuación (29), obtenemos (Lázaro et al., 2008):

$$X = \theta Z \quad (31)$$

donde:

$$\theta = [A \quad B \quad X_0] \quad (32)$$

$$Z = \begin{bmatrix} [X]P \\ [U]P \\ e \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$e = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots] \quad (34)$$

Cuando se tiene un SLIT la matrices de coeficientes  $[X]$  y  $[U]$  de cada estado y entrada respectivamente se convierten en una matriz de vectores de coeficientes  $X_j$  y el vector de coeficientes de la entrada  $U$ . Esto hace que las matrices se vuelvan más dispersas.

Es claro que para resolver este problema y obtener los parámetros estimados es necesario aplicar el método de mínimos cuadrados para obtener la pseudoinversa de  $\theta$ , así:

$$\hat{\theta} = XZ'(ZZ')^{-1} \quad (35)$$

**Redundancia Analítica.** Dentro de los sistemas dinámicos es frecuente encontrar una redundancia física, es decir, la implementación de varios dispositivos de las mismas características dentro de un mismo sistema de medición y/o control, por ejemplo, cuando se utilizan dos o más sensores para prever cualquier eventualidad ante una falla del mismo que ocasiona una inestabilidad del sistema, esta situación ocurre en aquellos sistemas en donde se requieren sistemas de respaldo para proporcionar cualquier confiabilidad del sistema.

Otra alternativa a la redundancia física que suele ser más económica es la redundancia analítica. Este tipo de redundancia supone la posibilidad de realizar varios experimentos sobre el sistema a identificar, los

experimentos realizados incorporan diferentes modos de operación cuando estos se excitan con diferentes tipos de entradas en diferentes intervalos de tiempo, otra variante constituye la aplicación de la misma señal a diferentes frecuencias, corrimientos de fase o cambios de magnitud (Alvarado, 2001; Lázaro et al., 2008).

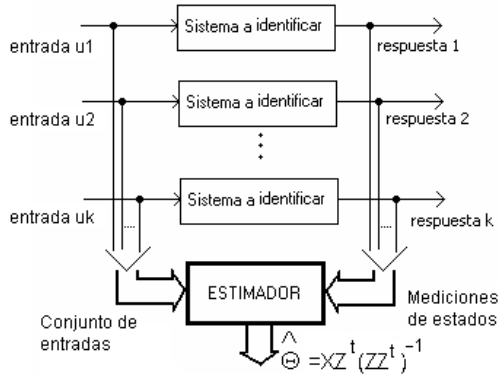


Figura 4. Esquema de redundancia analítica.

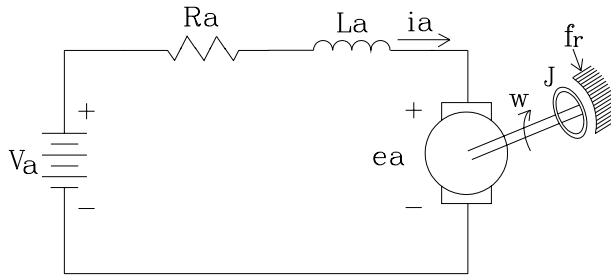


Figura 5. Circuito equivalente del motor de CD.

Posteriormente se utiliza toda esta información en un mismo proceso de estimación, tal y como se observa en la Figura 4, la desventaja de esta redundancia analítica es que hace que el proceso de identificación se realice fuera de línea.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

**Modelo del Motor de CD controlado por armadura** En este artículo se muestra como caso de estudio la estimación de parámetros de un motor de CD con imanes permanentes, para lo cual la máquina de CD se visualiza como un convertidor de energía electromagnética ideal, cuyo circuito equivalente se muestra en la Figura 5.

Este motor de CD se puede modelar en variables de estado tal y como se muestra en la ecuación (36).

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K}{L_a} \\ \frac{K}{J} & -\frac{f_r}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{bmatrix} v_a \quad (36)$$

Donde:

- $i_a$ .- Corriente de armadura
- $\omega$ .- Velocidad rotacional de la armadura
- $K$ .- Constante de velocidad
- $L_a$ .- Inductancia de armadura
- $R_a$ .- Resistencia del devanado de armadura
- $f_r$ .- Coeficiente de fricción viscosa
- $J$ .- Inercia del rotor

### Identificación de parámetros

Aplicando la metodología mostrada el sistema descrito puede reescribirse usando la ecuación (31), en este caso se consideran condiciones iniciales cero, por lo que se tiene:

$$[I_a \quad \omega]^t = \begin{bmatrix} \hat{\theta} \\ \frac{R}{L} & -\frac{K}{L} & \frac{1}{L} \\ \frac{K}{J} & -\frac{f_r}{J} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I_a]P \\ [\omega]P \\ [V_a]P \end{bmatrix} \quad (37)$$



Figura 6. Motor de CD empleado en el caso de estudio.

Por lo tanto, para estimar los parámetros de motor de CD, se requiere obtener información de los estados ( $I_a, \omega$ ), así como de entrada aplicada ( $V_a$ ), a los cuales se le debe aplicar un expansión en series Walsh para obtener la matriz de coeficiente correspondiente, posteriormente la aplicación de la ecuación (32) a la ecuación (35) permite obtener la identificación de parámetros utilizando la pseudoinversa de  $Z$  para estimar  $\hat{\theta}$ . Con esta técnica se obtiene la identificación de los parámetros del motor a partir de la  $I_a$  y  $\omega$ , las cuales pueden provenir de un conjunto de mediciones, en este caso fueron producidos por simulación. Los programas utilizados en el proceso de identificación fueron implementados en el lenguaje de programación de Matlab y la interfase gráfica en LabVIEW, la Tabla 1 muestra los parámetros reales del motor de CD con imanes permanentes mostrado en la Figura 6.

Tabla 1. Parámetros del motor de CD.

Potencia nominal $P_{ot}$	120 W
Voltaje nominal $V_a$	24 V
Resistencia $R_a$	1.01 $\Omega$
Inductancia $L_a$	1.6 x 10 <sup>-3</sup> H
Coeficiente $K$	6.12 x 10 <sup>-2</sup> Nm/A
Inercia del rotor $J$	2.6 x 10 <sup>-5</sup> Kgm <sup>2</sup> .
Coeficiente de fricción $f_r$	1.2 x 10 <sup>-5</sup> N.ms

Para lograr la identificación del sistema se realizaron simulaciones en el dominio del tiempo (ODE 45) del arranque del motor de CD utilizando redundancia analítica, se emplearon dos entradas diferentes, una de ellas fue una función escalón de magnitud 24 y otra correspondió a una señal de escalón con una componente tipo pulso de magnitud 0.6, todo ello con el objeto de obtener la evolución de las variables  $i_a$  y  $\omega$  y lograr excitar los modos de operación del sistema.

En este caso se obtuvieron con 512 muestras para un tiempo de 0.1 segundos, cada una de ellas se pasaron al dominio de la frecuencia calculando sus coeficientes usando como base ortogonal las series Walsh para obtener las variables en el dominio de la frecuencia  $I_a$  y  $\omega$ .

La interfase gráfica mostrada en la Figura 7, fue desarrollada para realizar la identificación paramétrica del sistema elegido, en donde se muestra la simulación realizada, en este caso considerando redundancia analítica de dos entradas. Debido a que

la técnica de identificación propuesta se aplica a través de simulación, se desarrolló la interfase en LabVIEW® mostrada en la Figura 7, en ésta se aprecia un área para introducir los parámetros del motor de CD, así como las condiciones iniciales de las variables de estado ( $\omega$ ,  $i_a$ ), esto permite generar los datos necesario para realizar la identificación paramétrica, es decir, producir datos de la entrada y la salida, así como la evolución de las variables de estado. En la parte inferior derecha, se muestran los resultados de los parámetros estimados y los errores correspondientes a cada parámetro. Además, se muestra una gráfica de la señal de entrada aplicada al sistema para la obtención de dichos datos.

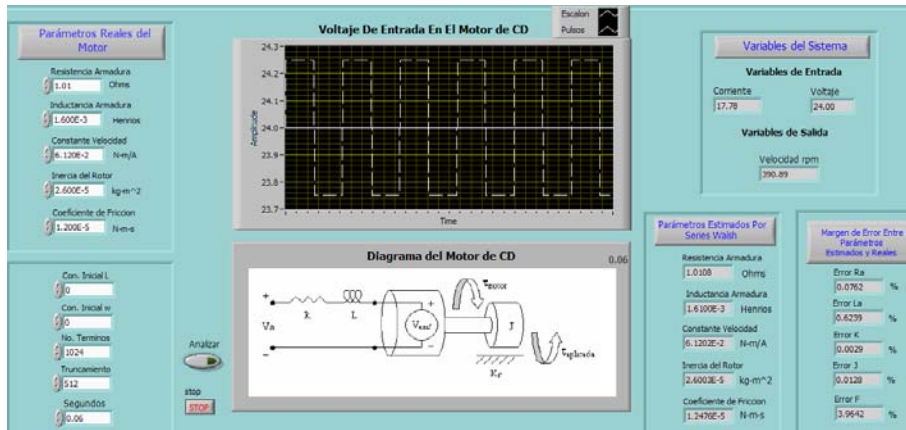


Figura 7. Interfase gráfica diseñada.

El algoritmo de identificación fue programado usando Matlab®, el cual es incorporado a la interfase gráfica para obtener datos de las variables de estado del sistema a partir de la aplicación de diferentes tipos de entrada, para identificar los parámetros se utilizaron

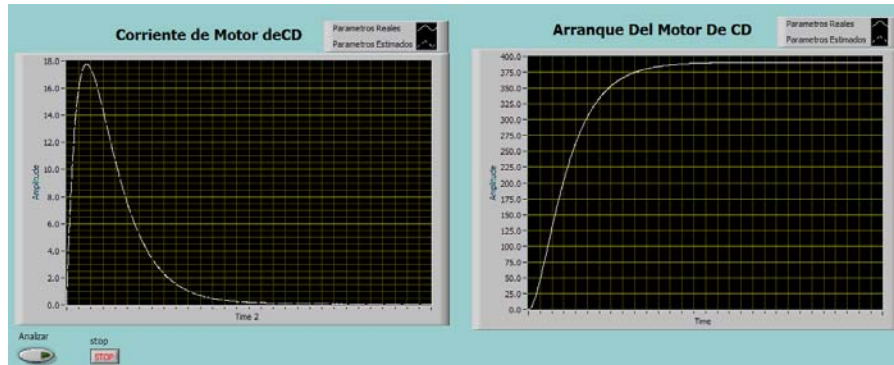
512 términos de la serie Walsh y 1024 puntos para la transformada Walsh. La Tabla 2 muestra los resultados obtenidos y su comparación con los parámetros reales, en esta tabla se puede observar que los errores obtenidos no sobrepasan el 5%. La Figura 8 muestra la respuesta del sistema ante una entrada escalón obtenidas al comparar la respuesta del sistema usando los parámetros estimados vs

parámetros reales, en estas se aprecia una amplia concordancia tanto para la velocidad como para la corriente de armadura, lo cual permite validar los resultados obtenidos.

Tabla 2. Parámetros reales vs estimados y errores obtenidos.

Parámetro	Valor real	Valor estim	Error %
Resistencia $R_a$	1.01	1.0108	0.0762
Inductancia $L_a$	$1.6 \times 10^{-3}$	$1.61 \times 10^{-3}$	0.6239
Coefficiente $K$	$6.12 \times 10^{-2}$	$6.1202 \times 10^{-2}$	0.0029
Inercia del rotor $J$	$2.6 \times 10^{-5}$	$2.6003 \times 10^{-5}$	0.0128
Coefficiente de fricc	$1.2 \times 10^{-5}$	$1.2476 \times 10^{-5}$	3.964





**Figura 8.** Comparación de la respuesta del sistema con parámetros estimados vs parámetros reales ante una entrada escalón.

### CONCLUSIONES

- Se ha presentado una técnica basada en el dominio de la frecuencia para la estimación de parámetros de SLIT, la cual emplea como herramienta la teoría de cálculo operacional y usa como base la matriz de integración para proporcionar una ecuación algebraica que permite la identificación de parámetros, esta última es resuelta por medio de la pseudoinversa. Además, la técnica permite determinar los parámetros del modelo continuo del sistema, es decir, se realiza la estimación sin tener que discretizar el modelo.
- En el proceso de identificación paramétrica aplicado a SLIT, el empleo de las series

ortogonales tipo Walsh muestra ventajas respecto a otras series ya que pueden aproximar los parámetros del sistema con menor número de términos.

- El error promedio disminuye a medida que el número de términos tomados para la serie ortogonal aumenta.
- Se aplica la redundancia analítica al sistema para suponer la posibilidad de realizar varios experimentos sobre el sistema a identificar, esto con el objeto de excitar algunos parámetros que no son perceptibles con cierto tipo de entrada.

### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alvarado N., (2001). Identificación de Cargas ante Condiciones no Senoidales, usando Técnicas de Estimación en el Dominio de la Frecuencia mediante Matrices Operacionales. Tesis de Maestría, División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la UMSNH, México.

Avilés O .F., Niño P. A., Solaque, L. (2002), Identificación de Parámetros de Sistemas Dinámicos, Ciencia e Ingeniería Neogranadina, Julio 012, 41-52.

Chen C. F., Hsiao C. H. (1975). A state-space approach to Walsh series solution of linear systems. Int. J. Systems Sci. 6-9, 833-858.

Chen C. F., Tsay Y. T. (1977). Walsh Operational Matrices for Fractional Calculus and their Application to Distributed Systems. Journal of the Franklin Institute. 503-3, 267-284.

Cheng-Chian L, Yen-Ping S. (1983), Analysis and Optimal Control of Time-Varying Systems via Chebyshev Polynomials. International Journal of Control, 38-5, 1003-1012.

Datta K. B., Mohan B. M. (1995), Orthogonal Functions in Systems and Control, 1a edición, World Scientific, Singapore.

- Fassois S. D., Rivera D. E. (2007). Applications of System Identification. IEEE Control Systems Magazine. 27-5, 24-26.
- Juric Z., Perunicic B. (2004), An Extension of the Ziegler-Nichols' Method for Parametric Identification of Standard Plants, En memorias del IEEE MELENCON 2004, 363-366, Dubrovnik, Croatia.
- Lázaro I. I., Zavala S., Anzures J. (2008). Estimación de Parámetros de Sistemas Lineales vía Matrices Operacionales. En memorias de la Séptima Conferencia Iberoamericana en Sistemas, Cibernética e Informática CISCI 2008, Baralt J. (Editor), 240-245, Orlando Florida, USA.
- Rico J.J., Heydt G. T., Keyhani A., Agrawal B. L., Selin D. (2001). An Algebraic Approach for Identifying Operating Point Dependent Parameters of Synchronous Mechines Using Orthogonal Series Expansions. IEEE Transactions on Energy Conversion, IEEE, 16-1, 92-98.
- Samavat M., Rashidie A. J., (1995). A New Algorithm for Analysis and Identification of Time Varying System. En memorias del Proceeding of the American Control Conference. 708-712, Seattle, Washington, USA.

Este documento se debe citar como:

Isidro I. Lázaro C., David Roman M., Juan Anzures M.<sup>1</sup> y Nun Pitalúa D. (2009). **Técnica de Estimación Paramétrica Aplicada a un Motor de CD Vía Series Walsh**. Ingeniería, Revista Académica de la FI-UADY, 13-2, pp. 23-32, ISSN: 1665-529X.