

El principio de Fermat, la braquistócrona y ¿la curvatura de la luz?

Argáez-Mendoza, S.¹, Oliva, A.I.²

Fecha de recepción: 17 de diciembre de 2010 – Fecha de aprobación: 08 de abril de 2011

Resumen

Este trabajo relaciona el Principio de Fermat y la ley de Snell de la refracción de la luz al propagarse en un medio con índice de refracción variable, con una metodología que nos permite obtener la función-trayectoria de mínimo tiempo de una partícula conocida como la *braquistócrona*. Se muestran las relaciones matemáticas que nos permiten obtener la función que describe dicha trayectoria, su tiempo de propagación y se ilustra con un experimento óptico la geometría cicloidal de la trayectoria de un haz de luz, como resultado de propagarse en un medio con índice de refracción variable, generado a partir de una interfase agua-miel formada por difusión.

Palabras clave: Braquistócrona, Principio de Fermat, ley de Snell.

Fermat's principle, the branquistochrone, and the light's curve trajectory?

Abstract

This work relates the Fermat's principle and the Snell's law of the light refraction which propagates into a medium with variable refraction index with a proposed methodology to obtain the path-function of minimum time used by a particle slicing down which is known as the *braquistochrone*. The mathematical relations to obtain the function of such trajectory are described and illustrated with an optical experiment of the light-trajectory as a result of its propagation into a medium with variable refraction index generated by a diffused honey-water interphase.

Keywords: braquistochrone, Fermat's Principle, Snell's law.

¹ Estudiante de Ingeniería en Mecatrónica, Universidad Anáhuac-Mayab, Carretera Mérida-Progreso Km 15.5, Int. Km 2 Carretera Chablekal. Mérida Yucatán México.

² Investigador Titular del Cinvestav IPN, Unidad Mérida, en periodo sabático en la Universidad Anáhuac-Mayab, Carretera Mérida-Progreso Km 15.5, Int. Km. 2 Carretera Chablekal. Mérida Yucatán México. oliva@mda.cinvestav.mx

Nota: El período de discusión está abierto hasta el 1° de noviembre de 2011. Este artículo de divulgación es parte de **Ingeniería–Revista Académica de la Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Yucatán**, Vol. 15, No. 1, 2011, ISSN 1665-529X.

INTRODUCCIÓN

Es indudable que las matemáticas son una herramienta de mucha utilidad en todos los campos de la ciencia y del conocimiento; son armas de gran valor cuando a través de un experimento pueden hacerse visibles y necesarias para entender el comportamiento de dicho experimento. El cálculo variacional es una herramienta que nos permite resolver problemas que a simple vista no parecen tan sencillos y lógicos de entender. Un caso específico fue el propuesto por Johann Bernoulli en junio de 1696 (*Acta Eruditorum*), cuando retó a los colegas de su época a determinar cuál era la trayectoria de mínimo tiempo que debía seguir una partícula al deslizarse de un punto a otro por efectos exclusivamente gravitatorios. Este problema fue un reto para los grandes matemáticos de ese tiempo (Newton, Leibniz, Hooke, Huygens y Halley, entre otros) (de Icaza 1994), que le dieron diferentes soluciones, siendo el propio Bernoulli quien lo resolvió usando cálculo infinitesimal, aunque Newton fue el que propuso la solución más elegante y sencilla. En este trabajo pretendemos relacionar estos conceptos de cálculo con un experimento de óptica para explicar la trayectoria que sigue la luz cuando ésta viaja a través de un medio con índice de refracción variable y continuo

TEORÍA.

El Principio de Fermat y el reto de Bernoulli.

En un medio homogéneo (con el mismo índice de refracción), la luz se propaga en línea recta. En esta condición es válido afirmar que la distancia más corta entre dos puntos, es la recta que los une. Cuando

durante la propagación de la luz, ésta pasa de un medio a otro medio con diferentes índices de refracción, su trayectoria estará formada por dos rectas con una discontinuidad justo en la interfase entre los dos medios y en el punto de incidencia. Esto se debe a que la luz requiere recorrer una distancia mínima en su trayectoria al cambiar de medio. Pero si ahora el medio de propagación presenta cambios continuos (heterogeneidades) en el índice de refracción, entonces la trayectoria que seguirá será una curva. Estas diferentes trayectorias se pueden explicar por el Principio propuesto por Pierre Fermat (1601-1665) que dice que la luz al propagarse recorre un camino óptico cuya longitud es extrema (mínima, máxima o sin cambio).

El reto matemático impuesto por Bernoulli (1667-1748) a los matemáticos para encontrar la trayectoria de mínimo tiempo posible (Erlichson 1999), se basó en un análisis donde se usó por primera vez el cálculo variacional para su solución (Koetsier 1985). El enunciado del reto de Bernoulli fue: “*Dados dos puntos A y B en un plano vertical, ¿cuál es la curva trazada por un punto que se mueve sólo por gravedad, el cual inicia en A y termina en B en el menor tiempo posible?*”. Para su solución, propuso que una partícula en el punto A viaja en un medio 1 con una velocidad v_1 y un ángulo α_1 con la vertical, incide en el punto O y atraviesa al medio 2 con una velocidad v_2 formando un ángulo α_2 con la vertical hasta llegar al punto B (ver Figura 1).

El tiempo total que le llevaría sería la suma de los tiempos de ambas trayectorias:

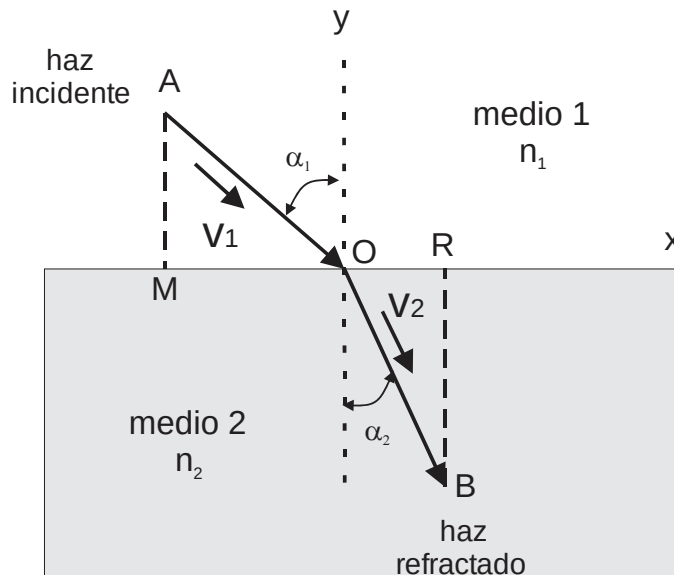


Figura 1. Diagrama esquemático del Principio de Fermat para hallar la trayectoria de mínimo tiempo posible de una partícula que se propaga entre dos medios distintos.

$$t = \frac{\overline{AO}}{v_1} + \frac{\overline{OB}}{v_2} \quad (1)$$

Usando relaciones trigonométricas para sustituir los segmentos $\overline{AO}$ y $\overline{OB}$ se obtiene:

$$t = \frac{\overline{AM} \sec \alpha_1}{v_1} + \frac{\overline{RB} \sec \alpha_2}{v_2} \quad (2)$$

Para que el tiempo de viaje de la partícula sea mínimo, máximo o sin cambio, se requiere que su diferencial sea cero, esto es, $dt=0$.

Diferenciando la expresión (2) e igualando a cero:

$$dt = \frac{\overline{AM} \sec \alpha_1 \tan \alpha_1 d\alpha_1}{v_1} + \frac{\overline{RB} \sec \alpha_2 \tan \alpha_2 d\alpha_2}{v_2} = 0 \quad (3)$$

Ahora bien, de la Figura 1, la suma de los segmentos $\overline{MO}$ y $\overline{OR}$ debe ser una constante, esto es:

$$\overline{MO} + \overline{OR} = \overline{AM} \tan \alpha_1 + \overline{RB} \tan \alpha_2 = \text{constante} \quad (4)$$

Diferenciando la expresión (4),

$$\overline{AM} \sec^2 \alpha_1 d\alpha_1 + \overline{RB} \sec^2 \alpha_2 d\alpha_2 = 0 \quad (5)$$

Sustituyendo la ecuación (5) en la ecuación (3), se obtiene la expresión:

$$\frac{\sec \alpha_1}{v_1} = \frac{\sec \alpha_2}{v_2} = \text{constante} \quad (6)$$

Si ahora hacemos que estos dos tiempos sean infinitesimales, podemos obtener que para cada punto

de la trayectoria, se cumple que:

$$\frac{\sec \alpha}{v} = \text{constante} \quad (7)$$

Esta ecuación puede compararse con la ley de Snell de la refracción de la luz cuando ésta viaja en diferentes medios.

La ley de Snell y la trayectoria cicloidal.

Uno de los postulados sobre el que está basado gran parte del conocimiento de la física es que la velocidad de la luz es una constante y viajando en el vacío alcanza el límite máximo de velocidad que puede existir. Esta constante tiene un valor exacto e igual a $c=2.99792458 \times 10^8$ m/s (Physics Today 2002), en cualquier otro medio diferente al vacío, la luz se propaga con una velocidad menor. Esta afirmación fue demostrada y obtenida matemáticamente a través

de las ecuaciones de Maxwell (Jackson 1975). Además, otra característica importante es que la luz viaja siempre en línea recta cuando está presente en un medio homogéneo. Sin embargo, su velocidad y trayectoria es modificada cuando durante su viaje cambia de medio (fenómeno de la refracción). La ley propuesta por Willebrord Snell (1591-1626) permite determinar ese cambio en la magnitud de la velocidad y de la trayectoria de la luz cuando cambia de medio. Tomando la ecuación (6) obtenida del principio de Fermat y asumiendo que la velocidad de la luz se modifica al cambiar de medio, es posible determinar el ángulo de refracción de la luz usando la ley de Snell a través de la relación (Hecht 2003):

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 \quad (8)$$

Donde n_1 , y n_2 son los índices de refracción de los dos medios definidos como $n=c/v$, esto es, la relación entre la velocidad de la luz en el vacío c y la velocidad v con la que viaja en el otro medio distinto

al vacío; y α_1 y α_2 son los ángulos con la vertical con los que la luz incide y se refracta, respectivamente. Dado que v es siempre menor a c , entonces, el índice de refracción n presenta siempre un valor superior o

igual a 1. Un ejemplo muy sencillo para entender este efecto de refracción es el que se observa cuando se introduce un objeto en el fondo de un vaso inicialmente vacío (en realidad hay aire con $n_1=1.0002926$). Supongamos que mirando con un ángulo de 30° con la vertical, desde el borde del vaso hacia el fondo no podemos ver el objeto del fondo. Ahora llenemos poco a poco el vaso con agua ($n_2=1.333$). Si mantenemos el mismo ángulo de la visión desde el borde, veremos que al ir subiendo el nivel del agua, el objeto del fondo del vaso irá apareciendo paulatinamente en nuestro campo visual. Esto se debe a que la luz se refracta a ángulos menores al ir de un medio de menor índice de

refracción, a uno de mayor valor y ocasiona que nuestro campo visual del fondo del vaso, se incremente. Si asumimos que los medios son únicamente aire y agua, entonces, al incidir un haz de luz en el aire con un ángulo de $\alpha_1=30^\circ$ respecto de la vertical en la interfase, la luz, de acuerdo a la ecuación (8), se refractará en el agua con un ángulo de $\alpha_2=22^\circ$. La Figura 2 muestra un esquema representativo de la ley de Snell. De la relación de Snell podemos afirmar que si $n_1 < n_2$, entonces, $\alpha_1 > \alpha_2$. Si la luz se propaga del agua hacia el aire, la ecuación (8) sigue siendo válida.

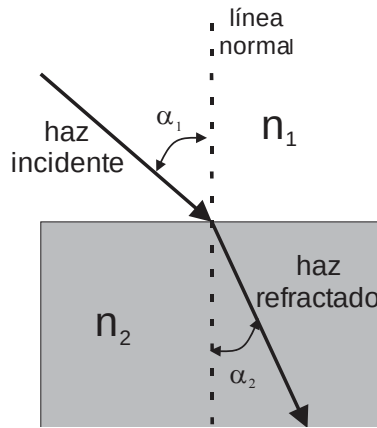


Figura 2. Esquema de la Ley de Snell mostrando la interfase entre dos medios diferentes ($n_1 < n_2$).

Considerando la relación obtenida con el principio de Fermat, entonces las ecuaciones (7) y (8) son

similares y pueden re-escribirse en forma general como:

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2} = \frac{\sin \alpha}{v} = K = \text{constante} \quad (9)$$

Donde v_1 y v_2 son las velocidades con las que viaja la partícula (la luz tiene la dualidad onda-partícula) en los diferentes medios. La ecuación (9) puede ser generalizada para cualquier número de medios y espesores de los mismos. La ley de Snell, de la refracción de la luz, es obtenida considerando que cuando ésta se propaga de un punto a otro lo hace siguiendo un camino óptico cuya longitud es un mínimo, un máximo o no cambia (Principio de Fermat) (Luetich 2002).

en un deslizamiento donde sólo interviene el efecto de la gravedad.

Ahora el reto es hallar la función $f(x)$ de la trayectoria que tiene que seguir la partícula (como la luz) para que realice el mínimo tiempo posible durante su viaje

Para determinar esta función, utilicemos el Principio de Fermat, la ley de Snell y los conceptos más simples de una función matemática. Consideremos la función $f(x)$ de la Figura 3. Sea $P(x,y)$ un punto de la trayectoria con pendiente $f'(x) = dx/dy = \tan \theta$. Asumiendo que la partícula parte del reposo ($v_i = 0$) desde una posición $(0, 0)$ y se desplaza por gravedad a lo largo de dicha trayectoria $f(x)$, la energía potencial inicial se va transformando en energía cinética, adquiriendo una velocidad v en cualquier punto $P(x,y)$ de la trayectoria dada por:

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{2gy} = F\sqrt{y} \quad (10)$$

Siendo donde $F=\sqrt{2g}$ es una constante con $g=9.81$ m/s², la aceleración de la gravedad e y la coordenada

vertical de la partícula en cualquier instante de tiempo t .

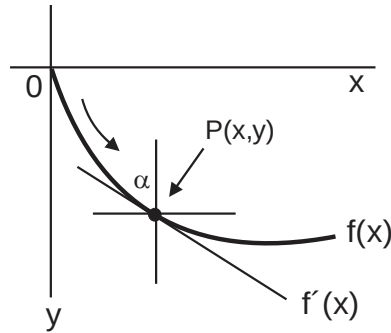


Figura 3. Función-trayectoria analizada en este trabajo

Sustituyendo la ecuación (10) en la ecuación (9):

$$\frac{\sin \alpha}{v} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2gy}} = K \quad (11)$$

Que puede escribirse como

$$y = \frac{K^2}{2g} \sin^2 \alpha \quad (12)$$

De acuerdo con la Figura 3, la función $\sin^2 \alpha$ puede re-escribirse usando las siguientes identidades

trigonómicas:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{\csc^2 \alpha} = \frac{1}{(1 + \cot^2 \alpha)} = \frac{1}{(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2)} \quad (13)$$

Sustituyendo la ecuación (13) en la ecuación (12) nos

arroja la relación

$$\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)y = \frac{K^2}{2g} \quad (14)$$

donde el término $K^2/2g$ es otra constante.

La ecuación (14) es una ecuación diferencial cuya solución describe una curva llamada *cicloide*. La constante asociada, no modifica la forma general de su solución. Esto significa que la solución puede ser empleada tanto con partículas inerciales, como con partículas, como la luz, que viajan a alta velocidad. La cicloide es la curva generada por un punto de una circunferencia generatriz al rodar sobre una línea recta directriz sin que haya deslizamiento. La constante $K^2/2g=2R$, indica la altura máxima que alcanza la cicloide, siendo R el radio de la circunferencia generatriz. La cicloide tiene su eje de simetría en el punto $(\pi R, 0)$ y una longitud de onda de $\square=2\pi R$. La figura 4 muestra la forma de esta curva

generada. Dado que la curva es obtenida a través del Principio de Fermat, podemos afirmar que con la función-trayectoria $y(x)$, se obtiene el mínimo tiempo de viaje. La solución de la ecuación (14) depende exclusivamente del radio R generatriz.

Este tiempo mínimo de viaje se puede calcular si se considera la primera mitad de la cicloide dibujada en la figura 4 como la trayectoria. Este segmento de cicloide que produce el tiempo mínimo de viaje es conocido como la *braquistócrona* que significa “de tiempo más breve” (Ruiz-Felipe 2004).

La solución de la ecuación diferencial (14) puede

expresarse mediante las ecuaciones paramétricas (Purcell 2007) dadas por:

$$x = R(\theta - \sin \theta) \quad y \quad y = R(1 - \cos \theta) \quad (15)$$

Donde el valor de θ es válido entre 0 y 2π .

en conseguir la trayectoria, se usará la definición de velocidad:

Para determinar el tiempo que le toma a la partícula

$$v = ds/dt \quad \text{ó} \quad dt = ds/v \quad (16)$$

sustituyendo la longitud de arco ds determinado de la relación,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{R^2(1 - \cos \theta)^2 + R^2(\sin \theta)^2} d\theta \quad (17)$$

y la ecuación (10) para v , en la ecuación (16), se obtiene después de un tratamiento algebraico:

$$dt = \sqrt{\frac{R}{g}} d\theta \quad (18)$$

Integrando entre 0 y π (media cicloide), el tiempo en

seguir la trayectoria de media cicloide es:

$$t = \int_0^\pi \sqrt{\frac{R}{g}} d\theta = \pi \sqrt{\frac{R}{g}} \quad (19)$$

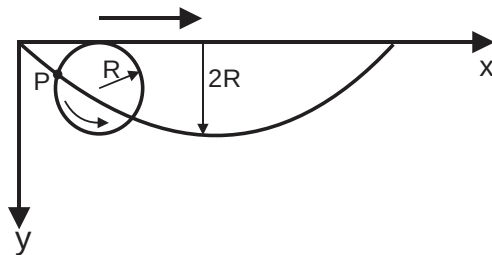


Figura 4. Curva cicloide y su circunferencia generatriz.

Luego, el tiempo mínimo de caída sólo depende del valor del radio generatriz R . Este tiempo calculado en la ecuación (19) es considerado como un tiempo mínimo dado que proviene de la ecuación obtenida con el Principio de Fermat.

Usando estos conceptos matemáticos, ¿qué pasaría si conseguimos generar un medio donde viaje la luz de tal manera que el índice de refracción de dicho medio presente una variación continua? Pues, de acuerdo con la ley de Snell, la luz que siempre viaja en línea recta, se refractaría (quebraría) continuamente por efecto del cambio continuo del índice de refracción.

¿Es esto posible? En la sección siguiente intentaremos demostrarlo a través de un experimento de óptica.

SISTEMA EXPERIMENTAL

Usando paredes de vidrio transparente comercial de 3 mm de espesor, se construyó un recipiente sin tapa en forma de paralelepípedo rectángulo de $10 \times 25 \times 10 \text{ cm}^3$. Las paredes fueron unidas y selladas con silicón transparente para evitar fugas esperando al menos 2 h para el secado. Una vez seco, se le agregó agua al recipiente formado hasta alcanzar un nivel cercano al 80% de su altura. La Figura 5 muestra el sistema construido, con el contenido de agua incluida.



Figura 5. Recipiente de vidrio con agua y miel en el fondo.

El recipiente se ubicó en un sitio libre de movimientos o alteraciones para mayor estabilidad y de fácil acceso para hacer observaciones para poder hacer incidir lateralmente un haz de luz y tomar fotografías a su trayectoria. Lentamente se le adicionó al agua 125 ml de miel clara de uso infantil. La miel, se depositó en el fondo formando una capa de espesor constante. En estas condiciones, se le dejó reposar completamente durante 3 días. Durante este tiempo, la miel y el agua se fueron difundiendo lentamente entre sí, creando una interfase de concentración variable y continua de miel, la cual disminuye con la altura.

En una visualización más cercana (no mostrada) de la Figura 5, es posible apreciar la interfase ondulada agua-miel, producto del efecto de lente generado. Esta interfase de concentración agua-miel variable, es la que produce un medio de dispersión con un índice de refracción variable y continuo, tal que cuando el haz colimado de luz se hace incidir, éste parecerá a la vista que viaja sobre el medio formando una curva; sin embargo, sabemos que la luz durante su viaje siempre lo hace en línea recta y ¡no puede curvarse! En realidad, esto se cumple, pero al viajar en un medio donde el índice de refracción es variable y continuo, nuestros limitados ojos ven que la luz viaja formando una trayectoria curva, aunque en realidad está cambiando de dirección punto a punto, dando lugar el fenómeno de la refracción de la luz en forma continua en cada punto del medio de concentración variable.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Una vez conseguida la interfase agua-miel difundida, se hizo incidir un haz monocromático y colimado de luz y se observó su trayectoria al atravesar el medio así formado. El haz de luz se obtuvo con ayuda de un láser de He-Ne de color naranja y el experimento se realizó dentro de un cuarto completamente oscuro

(aunque es recomendable hacerlo por la noche).

La Figura 6 muestra una serie de fotografías obtenidas como resultado de hacer pasar el haz de láser a lo largo del recipiente en el medio agua-miel generado.

La Figura 6a muestra el haz cuando se le hace pasar en la parte superior del medio donde únicamente hay agua pues la miel no ha llegado a difundirse hasta esa altura. Por esta razón, se observa una línea recta que atraviesa toda la longitud del recipiente. Se ha trazado con líneas blancas la geometría del recipiente para referencia y mejor visualización de la orientación isométrica del recipiente.

En las siguientes figuras (6b-6d), las fotografías fueron tomadas perpendiculares a la longitud del recipiente y a la trayectoria de incidencia del haz. La Figura 6b muestra la entrada del haz incidente, su curvatura y la reflexión del haz por efecto del gradiente de concentración de miel generado cerca de la interfase agua-miel. Se puede observar la curvatura tomada por el haz y su reflexión en la superficie del fondo del recipiente. Si hacemos incidir ahora el haz de láser un poco más arriba del fondo de la base, (Figuras 6c y 6d), podemos observar la trayectoria de la luz en forma más clara. La curva generada en esta trayectoria corresponde a la curva tipo cicloide o más precisamente a una braquistócrona. El hacer incidir a mayor altura el haz incidente, equivale a proporcionarle un radio cada vez mayor a la circunferencia generatriz de la cicloide.

Sin embargo, es importante aclarar que aunque nuestros ojos ven una trayectoria curvada de la luz, no estamos afirmando que la luz se curva, sino que ésta viaja siempre en línea recta al encontrar diferentes medios de índice de refracción cambiante.

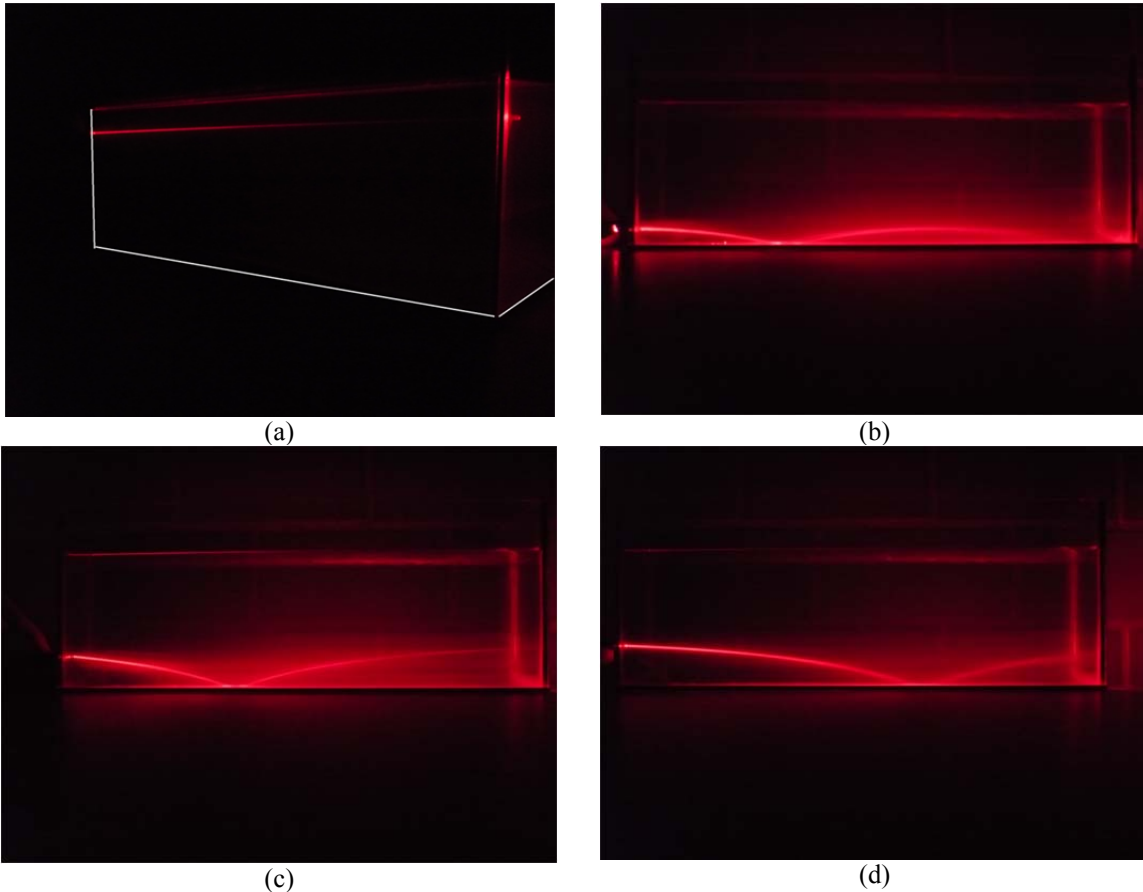


Figura 6. Fotografías obtenidas al hacer incidir un haz de luz de láser a un medio con índice de refracción continua: a) haz de láser viajando en la parte superior del agua, sin variación de índice de refracción; b) haz de láser incidiendo muy cercano al fondo. Se observa una trayectoria completa de una cicloide; c) y d) diferentes cicloides elevando la incidencia del haz de láser por arriba del fondo del recipiente.

El experimento de óptica realizado al hacer viajar un haz de láser a través de un medio preparado con un índice de refracción variable (difusión de agua-miel), nos permite observar y simular trayectorias que debe de seguir una partícula que consume el mínimo tiempo de viaje entre dos puntos de dicha trayectoria. La visualización de la “curvatura” de la luz, debe

entenderse desde el punto de vista de la refracción de la misma y no como una manera de demostrar que la luz se curva al viajar en un medio. Estos efectos de curvatura observados pueden ser comparados con la curvatura del espacio-tiempo que predijo Einstein cuando un planeta viaja en el espacio y es afectado por los efectos de los campos gravitatorios.

Agradecimientos: Los autores agradecen el apoyo brindado por el Dr. Ruben Dominguez Maldonado y los valiosos comentarios del Mtro. Luciano Domínguez.

REFERENCIAS

de Icaza-Herrera M. (1994). *Galileo, Bernoulli, Leibniz and Newton around the brachistochrone problem*, Rev. Mex. Fis. 40 (3), 459-475.

- Erlichson H. (1999). *Johann Bernoulli's brachistochrone solution using Fermat's principle of least time*, European J. Phys. 20 (5), 299-304.
- Hecht E. (2003). Optics, Third Edition, Pearson Addison-Wesley.
- Jackson J.D. (1975). Classical Electrodynamics, Second Edition, Wiley.
- Koetsier T. (1985) *The story of the creation of the calculus of variations: the contributions of Jakob Bernoulli, Johann Bernoulli and Leonhard Euler*. Dutch Holiday course : calculus of variations, Amsterdam, 1-25.
- Luetich J.J. (2002) *Ley de Snell, formalización de Descartes y Principio de Fermat*. Luventicus Adolescentes, Academia de Ciencias Luventicus, Rosario, Argentina.
- Physics Today, (2002). *The fundamental physical constants*. Buyers' Guide 55 (8), p. BG8.
- Purcell E.J., Varderberg D. y Rigdon S.E. (2007). *Representación paramétrica de curvas en el plano*. En: Cálculo. Cruz L. M. Pearson Educación de México S.A. de C.V. México. Pp. 531-534.
- Ruiz-Felipe, J. (2004). *Un bello problema de Física: Perspectiva histórica*. Sociedad de la Información, 9 (5668).

Este documento debe citarse como:

Argáez-Mendoza, S., Oliva, A. L., (2011). **El principio de Fermat, la braquistócrona y ¿la curvatura de la luz?** Ingeniería, Revista Académica de la FI-UADY, 15-1, pp 47-55, ISSN: 1665-529-X.