

Sincronización completa inexacta de sistemas fraccionarios de Lü

Martínez-Martínez, R.¹, Puga Manjarrez, S.¹, Lugo-Peñaloza, A. F.²

Fecha de recepción: 23 de febrero de 2011 – Fecha de aprobación: 29 de agosto de 2011

RESUMEN

Se propone un esquema de sincronización para sistemas fraccionarios caóticos, es decir, sistemas modelados con operadores de orden no entero (éstos operadores son generalizaciones de la derivada e integral usuales) cuyo comportamiento es caótico. En particular, se toman sistemas de Lü fraccionarios y un esquema maestro-esclavo, para la sincronización. Esto se lleva a cabo mediante un acoplamiento no lineal, por lo que la sincronización de todos los estados es inexacta, es decir, los estados de cada sistema se mantienen lo suficientemente cerca, debido a que sólo se garantiza que el sistema que representa el error es estable, y no asintóticamente estable. Pero, a diferencia de otros trabajos, no se pide eliminar la parte no lineal del error de sincronización, por lo que se considera que este enfoque es menos restrictivo.

Palabras clave: sincronización completa inexacta, sistemas de orden fraccionario, sistemas caóticos fraccionarios.

Complete inexact synchronization of fractional order Lü systems

ABSTRACT

In this work is proposed a synchronization scheme for fractional order chaotic systems, i.e., systems modeled by non integer order differential operators (these operators can be seen as generalizations of the ones for the usual integral and derivative) whose behavior is chaotic. In particular, the fractional order chaotic systems taken are the so called Lü systems and the synchronization approach is master-slave. The synchronization process is carried out through a nonlinear coupling, this is why the synchronization of all states is inexact, i.e., all the states of the system are maintained closely enough, due to the fact that is only guaranteed that the dynamic error system is stable, and not asymptotically stable. The main difference between this work and others on the subject is that in this scheme it is not necessary to eliminate the nonlinear part of the dynamic system of the error, therefore is considered by the authors that this approach is less restrictive.

Key words: complete inexact synchronization, fractional order systems, fractional order chaotic systems.

¹ Profesor de la Academia de Sistemas, UPIITA-IPN, México, D.F. Email: ramartinezr@ipn.mx, spuga@ipn.mx

² Profesor de la Academia de Mecatrónica, UPIITA-IPN, México, D.F. Email: lugounkn@gamil.com

Nota: El período de discusión está abierto hasta el 1° de marzo de 2012. Este artículo de investigación es parte de **Ingeniería–Revista Académica de la Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Yucatán**, Vol. 15, No. 2, 2011, ISSN 1665-529X.

INTRODUCCIÓN

La sincronización es un concepto fundamental y, de hecho, es un fenómeno universal en la ciencia y la tecnología. Existen muchos fenómenos interesantes que ocurren en la naturaleza, por ejemplo, luciérnagas destellando al mismo tiempo, grillos cantando en sincronía, las células del corazón que bombean al mismo tiempo. Por otro lado, existen distintas aplicaciones tecnológicas en las que se hace uso de la sincronización de sistemas caóticos, como: cifrado de información mediante el uso de sincronización de sistemas caóticos (Ming et al., 2008), coordinación de agentes múltiples (Cao et al., 2008), entre otros.

El cálculo fraccionario es una alternativa para modelar sistemas físicos, algunos de éstos sistemas son: viscoelasticidad, polarización dieléctrica, polarización electrodo-electrolito y ondas electromagnéticas (Das, 2008; Hilfer, 2000). Además, existen otras ramas de estudio relacionadas con el modelado de sistemas fraccionarios, como: dinámicas caóticas y su sincronización (Grigorenko et al., 2003; Hartley et al., 1995), estabilidad (Momani, 2003; Matignon, 1996; Wen, 2008), sistemas con retardos, identificación de sistemas, control de sistemas, robótica, principios variacionales y sus aplicaciones, ecuaciones de Euler-Lagrange, transformada de

Fourier fraccionaria, modos deslizantes fraccionarios, entre otras.

En la siguiente sección se presenta en forma breve al operador fraccionario de Caputo, que es el más utilizado en áreas de la ingeniería. A continuación se presentan dos teoremas utilizados para garantizar la estabilidad de la solución en el origen del sistema dinámico del error, garantizando así la sincronización. Finalmente se presenta una descripción de la metodología, un ejemplo de aplicación y las conclusiones obtenidas.

Sistemas de orden fraccionario

Utilizaremos el operador fraccionario de Caputo en la definición de los sistemas de orden fraccionario, esto se debe a que el significado de las condiciones iniciales para los sistemas descritos, utilizando éste operador, es el mismo que para los sistemas de orden entero.

Definición de la Derivada Fraccionaria de Caputo

La derivada fraccionaria de Caputo de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ de una función f está definida como: véase (Podlubny, 1999)

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t f^{(n)}(\tau) (t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau, \quad (1)$$

donde: $n-1 \leq \alpha < n$, $f^{(n)}(\tau)$ es la n -ésima derivada de f en el sentido usual, $n \in \mathbb{N}$ y Γ es la función gama.

Tomamos el problema de condiciones iniciales para un sistema no lineal de orden fraccionario, con $0 < \alpha < 1$

$${}_0^C D_t^\alpha x(t) = f(x, t), \quad x(0) = x_0 \quad (2)$$

Donde $x \in \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es Lipschitz (lo cual, se puede demostrar que asegura la unicidad de la solución), con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (Diethelm, 2002).

Para sistemas de orden fraccionario lineales e invariantes en el tiempo, $f(x, t) = Ax$, podemos garantizar la estabilidad en el sentido de Lyapunov. Tomamos el sistema siguiente, con $0 < \alpha < 1$

$$x^{(\alpha)} = {}_0^C D_t^\alpha x(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0 \quad (3)$$

Resultados de Estabilidad para sistemas de orden fraccionario.

Teorema 1(Matignon, 1996)

El sistema anterior es:

Asintóticamente estable si y sólo si $|\arg(\lambda_i(A))| > \frac{\alpha\pi}{2}$, $i = 1, 2, \dots, n$, donde $\arg(\lambda_i(A))$ denota el

argumento del eigenvalor λ_i de A . En este caso, el componente del estado decae a 0 como $t^{-\alpha}$ ■

Ahora para sistemas no lineales de orden fraccionario tomamos el siguiente resultado:

Teorema 2(Wen et al., 2008)

Considérese el sistema dinámico de orden fraccionario n -dimensional

$$x^{(\alpha)} = Ax + g(x) \quad (4)$$

donde A es una matriz, g es una función no lineal de x , y $0 < \alpha < 1$ si:

- La solución $x(t) = 0$ del sistema $x^{(\alpha)} = Ax$ es asintóticamente estable, y $\alpha\rho(A) > 1$ ($\rho(A) \equiv$ radio espectral de A).

- $g(0) = 0$ y $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0$.

Entonces $x(t) = 0$, para $0 \leq t_0 \leq t$, es una solución estable del sistema descrito por la Ecuación (4).

■

El teorema 1 sirve para garantizar la estabilidad asintótica del origen de los sistemas dinámicos lineales, este resultado ha sido utilizado en otros trabajos para lograr la sincronización completa

$$\begin{aligned} x_{\mathcal{M}}^{(\alpha)} &= f_{\mathcal{M}}(x_{\mathcal{M}}), & x_{\mathcal{S}}^{(\alpha)} &= f_{\mathcal{S}}(x_{\mathcal{S}}, u), \\ y_{\mathcal{M}} &= h_{\mathcal{M}}(x_{\mathcal{M}}) & y_{\mathcal{S}} &= h_{\mathcal{S}}(x_{\mathcal{S}}) \end{aligned} \quad (5)$$

donde $x_{\mathcal{M}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es el vector de estados del sistema maestro, $f_{\mathcal{M}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial suave $y_{\mathcal{M}}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la salida del sistema maestro, $x_{\mathcal{S}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es el vector de estados del sistema esclavo, $f_{\mathcal{S}}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial suave, $u \in \mathbb{R}^p$ es la entrada de control y $y_{\mathcal{S}}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la salida del sistema esclavo.

En este esquema de sincronización, el sistema maestro representa la dinámica *objetivo*, mientras que el sistema esclavo representa el sistema a ser controlado. Es decir, dado el error de sincronización:

$$e = x_{\mathcal{M}} - x_{\mathcal{S}}, \quad (6)$$

se debe de encontrar una función $u(x_{\mathcal{M}}, x_{\mathcal{S}})$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \approx 0$, puesto que se considera la sincronización completa inexacta.

Descripción

Es necesario tener identificado al sistema maestro, así como al sistema esclavo (como en la ecuación (5)), además para poder lograr la sincronización completa inexacta es necesario que ambos sistemas tengan descripciones de la forma de la ecuación (4) y que sean del mismo orden fraccionario α .

Después a partir de la definición del error de sincronización, ecuación (6), hay que determinar al sistema dinámico del error $e^{(\alpha)}$. La ley de control que se agrega al sistema esclavo debe ser construida de tal forma que el sistema dinámico del error sea de la forma de la ecuación (4), con la diferencia de que en

exacta, sólo que es necesario eliminar la parte no lineal del sistema dinámico del error. Por otro lado, al utilizar el teorema 2 es posible garantizar la estabilidad (a secas) del origen del sistema dinámico del error, pero sin la necesidad de eliminar la parte no lineal.

METODOLOGÍA

Esquema de Sincronización Maestro-Esclavo

Considérense los sistemas maestro y esclavo como:

vez del vector de estado tendremos al error, y que en vez de tener sólo a la matriz A , tendremos $A+BK$ para tener la posibilidad de lograr que el origen sea estable. Esquemas similares a este han sido presentados para orden entero (Pikovsky, 2001). Finalmente, en caso de que las condiciones del teorema 2 se cumplan, podremos decir que se ha logrado la sincronización completa inexacta de dichos sistemas.

EJEMPLO DE APLICACIÓN

Este esquema de sincronización está basado en garantizar la estabilidad del origen del sistema dinámico del error. En el siguiente ejemplo se muestran dos sistemas de Lü de orden fraccionario, uno se toma como el maestro, y el otro como esclavo.

Primero se presenta cada sistema, así como el plano fase del sistema, pero sin la ley de control. Las matrices A de ambos sistemas tienen los mismos parámetros, pero los sistemas tendrán distintas condiciones iniciales para obtener distintos comportamientos.

Sistema de Lü

Tómese el sistema de Lü maestro de orden fraccionario α , (Lu, 2006) que se puede escribir como:

$$x_{\mathcal{M}}^{(\alpha)} = Ax_{\mathcal{M}} + g(x_{\mathcal{M}}) = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} x_{\mathcal{M}} + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_{\mathcal{M}1}x_{\mathcal{M}3} \\ x_{\mathcal{M}1}x_{\mathcal{M}2} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

con $x_{\mathcal{M}} = [x_{\mathcal{M}1} \ x_{\mathcal{M}2} \ x_{\mathcal{M}3}]^T$, $a = 35$, $b = 3$, $c = 28$, $\alpha = 0.8$, y condiciones iniciales $x_{\mathcal{M}}(0) = [1 \ 0 \ 1]^T$.

A continuación se presenta el plano fase del sistema fraccionario de Lü maestro sin ninguna señal de control.

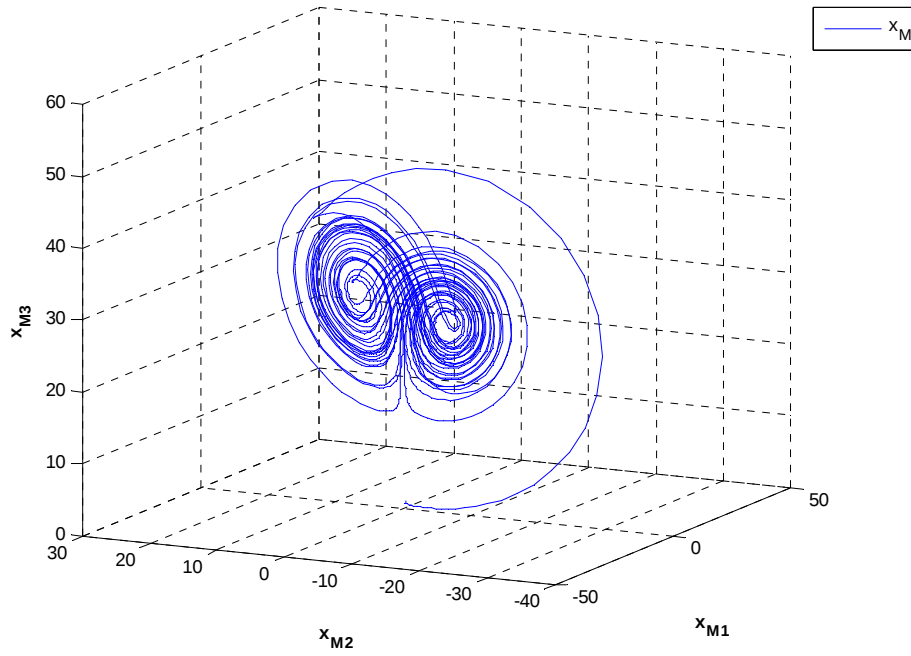


Figura 1. Plano fase del sistema de Lü maestro.

Y el sistema de Lü esclavo de orden fraccionario α , que se puede escribir como:

$$x_s^{(\alpha)} = Ax_s + g(x_s) + f_a(x_s) = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} x_s + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_{s1}x_{s3} \\ x_{s1}x_{s2} \end{bmatrix} + f_a(x_s) \quad (8)$$

con $x_s = [x_{s1} \ x_{s2} \ x_{s3}]^T$, $a = 35$, $b = 3$, $c = 28$, $\alpha = 0.8$, condiciones iniciales $x_M(0) = [-1 \ 3 \ 0]^T$, y el control $f_a(x_s) = g(x_M) - g(x_s) - g(x_M - x_s) - BK(x_M - x_s)$, donde $B = [1 \ 1 \ 1]^T$ y $K = [0 \ -50 \ 0]^T$.

A continuación se presenta el plano fase del sistema fraccionario de Lü esclavo sin ninguna se señal de control.

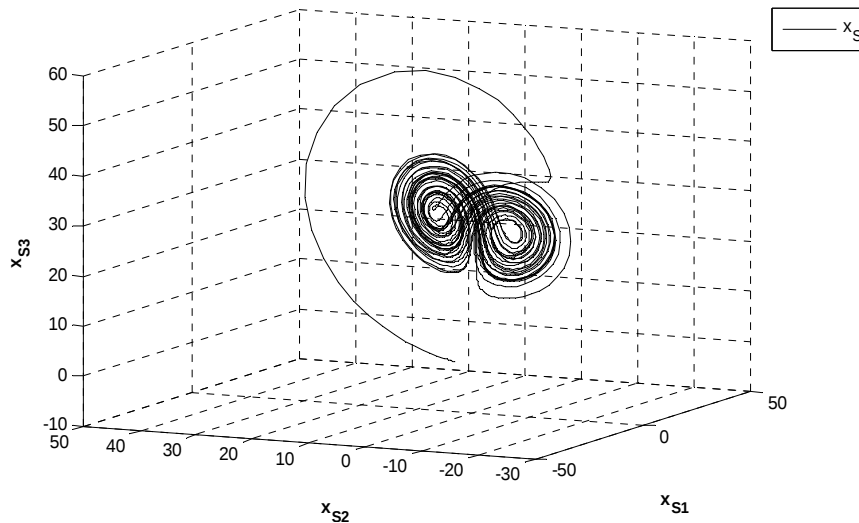


Figura 2. Plano fase del sistema de Lü esclavo.

De la ecuación del error de sincronización, la dinámica del error está dada por

$$e^{(\alpha)} = x_M^{(\alpha)} - x_S^{(\alpha)} = (A + BK)e + g(e) \quad (9)$$

Con B y K propuestos, se asegura que el sistema dinámico del error satisface las condiciones del Teorema (Wen et al., 2008)

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Con el cálculo de los valores adecuados se dice que las hipótesis del teorema (Wen et al., 2008) se

cumplen. La simulación se muestra en las Figuras 3-6. Se puede observar que dada la definición del error de sincronización, Ecuación (6), la sincronización se da cuando el error sea cero y las dinámicas correspondientes serán aproximadamente iguales. Hay que tener en cuenta que la ley de control (f_a) se aplica en $t = 4s$, i.e., para $t < 4s$ se tiene $f_a = 0$.

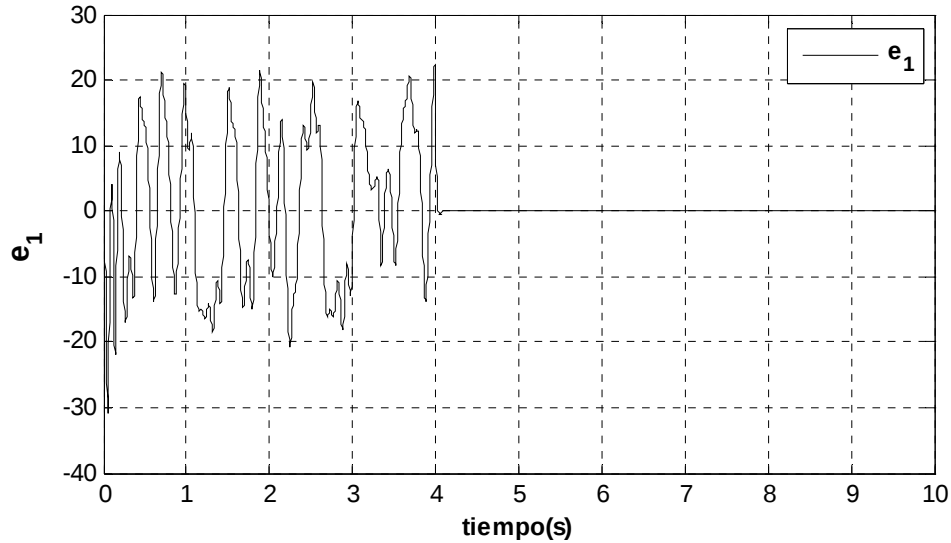


Figura 3. Componente $e_1(t) = x_{M1}(t) - x_{S1}(t)$ del error.

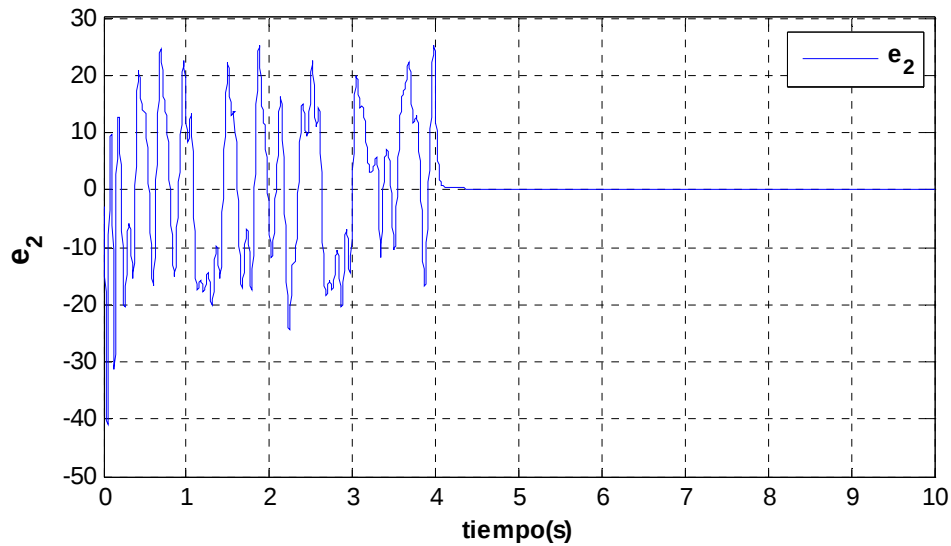


Figura 4. Componente $e_2(t) = x_{M2}(t) - x_{S2}(t)$ del error.

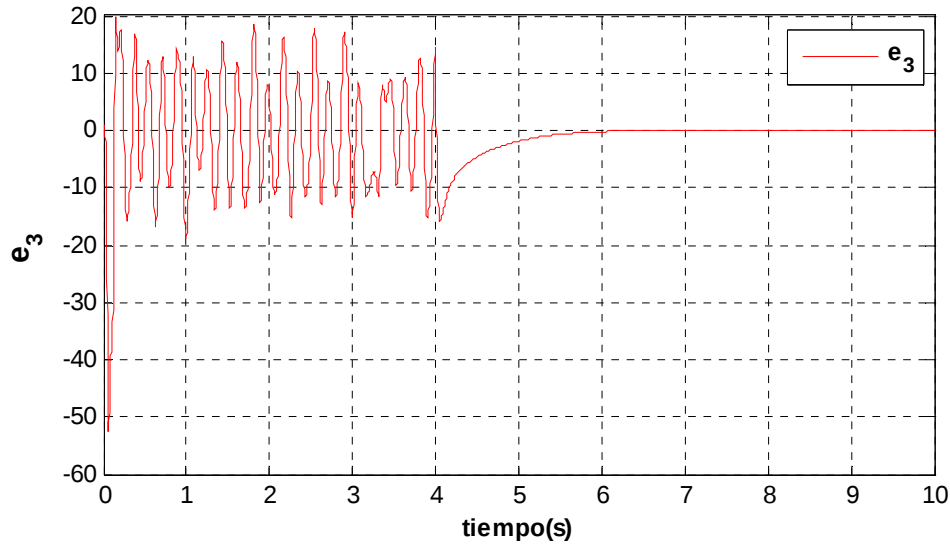


Figura 5. Componente $e_3(t) = x_{M3}(t) - x_{S3}(t)$ del error.

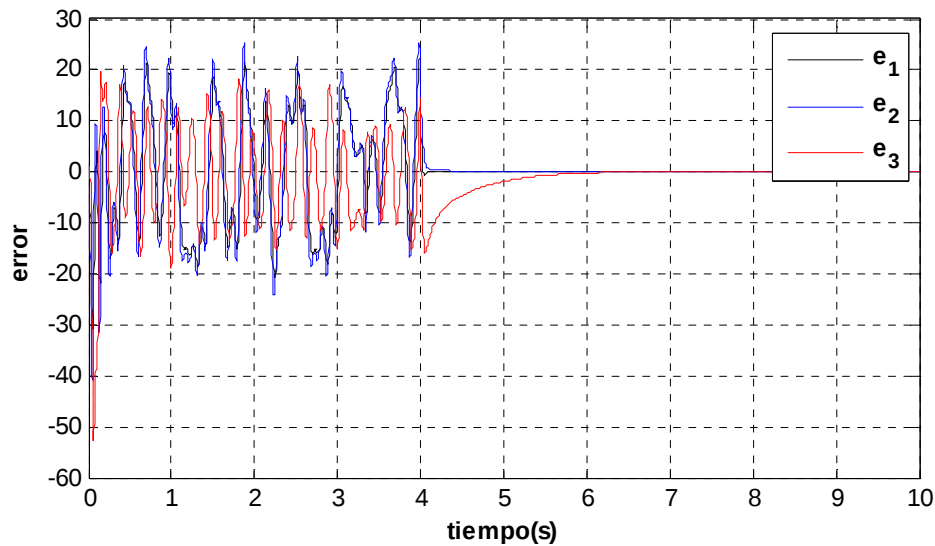


Figura 6. Componentes $e_1(t)$, $e_2(t)$, $e_3(t)$ del error, en una misma gráfica.

De las figuras 3 y 4 se observa que la sincronización de los estados 1 y 2 de los sistemas maestro y esclavo se da en un intervalo de tiempo *pequeño* en comparación con la sincronización del estado 3 de los sistemas, que se muestra en la figura 5.

En la Figura 6, se observa que al aplicar la ley de control f_a , en $t = 4s$, el error entre los estados de los sistemas se aproxima a cero. A continuación se presenta su plano fase con la señal de control activada en $t = 4s$ en la Figura 7.

En la Figura 7 se observan los planos fase del sistema maestro y del sistema esclavo en una misma gráfica. La intención es ilustrar la forma en la que es

modificada la dinámica del sistema del error, al modificar el acoplamiento.

CONCLUSIONES

Se puede observar que dependiendo del esquema de estabilidad con el que se cuente, es la manera en la cual se pueden construir las leyes de control o acoplamientos, para garantizar las condiciones de estabilidad. En trabajos futuros se pretende encontrar esquemas de estabilidad asintótica, para garantizar sincronización completa; i.e., se pretende que garantizar que cuando $t \rightarrow \infty$, la dinámica del sistema esclavo sea exactamente igual a la dinámica del sistema maestro.

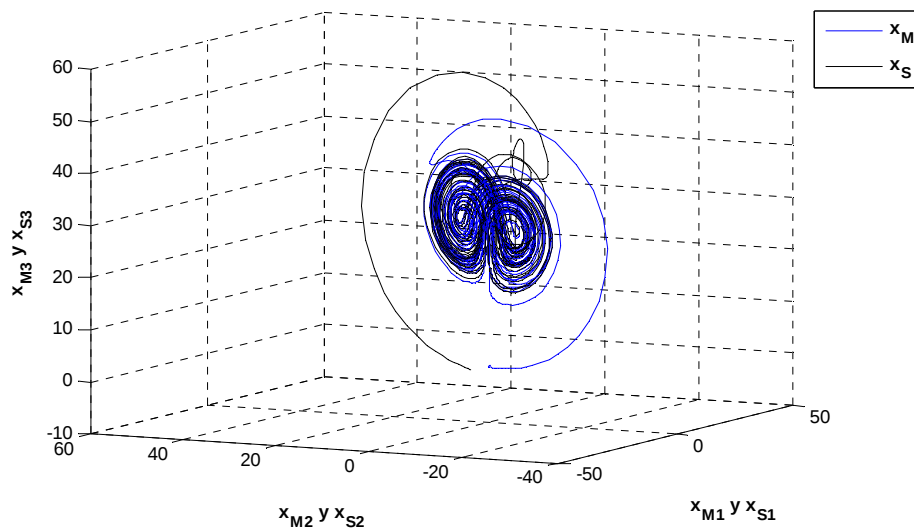


Figura 7. Plano fase de los sistemas maestro (azul) y esclavo (negro) con el control activado en $t=4s$.

Por ejemplo, se puede utilizar un esquema con funciones de Lyapunov candidatas, para garantizar estabilidad asintótica de una solución de la dinámica del error, en un intervalo dado.

Se presenta un esquema de acoplamiento para lograr la sincronización completa inexacta de dos sistemas caóticos de orden fraccionario, donde ambos sistemas de Lü (maestro y esclavo) tienen el mismo orden, α . La ley de control es no lineal y por lo tanto menos

restrictiva, pero debido a esto sólo se puede garantizar la sincronización completa inexacta.

Finalmente, es necesario mencionar que se utilizaron sistemas de Lü para ejemplificar, pero con este mismo esquema es posible lograr la sincronización de otro tipo de sistemas fraccionarios caóticos, como los sistemas fraccionarios de Chen, Lorenz, Chua, entre otros.

REFERENCIAS

- R. L. Bagley, R. A. Calico (1991), *Fractional order state equations for the control of viscoelastically damped structures*, J. Guid. Control Dyn. 14, 304–311.
- S. Das (2008). *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls*, 1st edition, Springer Berlin Heidelberg, New York.
- W. Deng, C. Li, J. Lü (2007), *Stability analysis of linear fractional differential system with multiple time delays*, Nonlinear Dynamics 48, 409–416.
- K. Diethelm, N. J. Ford (2002), *Analysis of fractional differential equations*, Math. Anal. Appl. 265, 229–248.
- N. M. Fonseca Ferreira, J. A. Tenreiro Machado (2003), *Fractional-Order Hybrid Control of Robotic Manipulators*, Proceedings of ICAR, Coimbra, Portugal.
- I. Grigorenko, E. Grigorenko (2003), *Chaotic dynamics of the fractional Lorenz system*, Physical Review Letters 91 (3), 034101:1–4.
- T. T. Hartley, C. F. Lorenzo, H. K. Qammer (1995), *Chaos in a fractional order Chua's system*, IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental theory and applications 42, 485–490.
- O. Heaviside (2007). *Electromagnetic Theory*, London: "The Electrician" Printing and Publishing Company, New York.
- R. Hilfer (2000). "Applications of fractional Calculus in Physics", World Scientific, River Edge, New Jersey.

- D. Kusnezov, A. Bulgac, G. D. Dang (1999), *Quantum Levy processes and fractional kinetics*, Phys. Rev. Lett. 82, 1136–1139.
- J. G. Lu (2006), *Chaotic dynamics of the fractional-order Lü systems and its synchronization*, Physics Letters A 354, 305–311.
- D. Matignon (1996), *Stability results for fractional differential equations with applications to control processing*, in Proceedings IMACS, IEEE-SMC, 963–968.
- S. Momani, S. Hadid (2003), *Lyapunov stability solutions of fractional integrodifferential equations*, IJMMS, 2503–2507.9
- A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths (2001), *Synchronization, a universal concept in nonlinear sciences*, Cambridge University Press, New York.
- I. Podlubny (1999), *Fractional Differential Equations*, 9th Edition, Academic Press, San Diego California.
- X.-J. Wen, Z.-M. Wu, J.-G. Lu (2008), *Stability analysis of a class of nonlinear fractional-order systems*, IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express briefs 55, 1178–1182.
- M. Yin, L. Wang (2008), *A New Study in Encryption Base on Fractional Order Chaotic System*, International Conference on Communications, Circuits and Systems (ICCCAS), 637 - 640 .

Este documento debe citarse como:

Martínez-Martínez, R., Puga Manjarrez, S., Lugo-Peñaloza, A. F. (2011). **Sincronización completa de sistemas fraccionarios de Lü**. Ingeniería, Revista Académica de la FI-UADY, 15-2, pp 93-100, ISSN: 1665-529-X.