Normas en el campo electromagnético

Méndez Gamboa, José A.¹

RESUMEN

Todo fenómeno electromagnético clásico es descrito a partir de las ecuaciones de Maxwell, en estas ecuaciones se relacionan a los campos eléctrico ($\mathbf{E}$) y magnético ($\mathbf{B}$) y las densidades de carga (ρ) y de corriente ($\mathbf{j}$); Las ecuaciones de Maxwell junto con la fuerza de Lorentz y la segunda ley de Newton nos dan una completa descripción de la dinámica clásica de la interacción de partículas cargadas y campos electromagnéticos.

En el presente trabajo se ofrece una deducción de las ecuaciones de Maxwell en forma covariante como ecuaciones de movimiento de una densidad lagrangiana. Así mismo, se obtiene, utilizando las teorías de norma, la densidad hamiltoniana de la electrodinámica clásica en las normas temporal y de Coulomb así como los corchetes de Poisson en dichas norma.

Palabras claves: Campo electromagnético, potencial escalar, potencial vectorial, norma.

INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones que describen la dinámica de sistemas bajo la acción de campos electromagnéticos son las ecuaciones de Maxwell, éstas, en el vacío, en unidades racionales y considerando $c=1$ son,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \rho \\ \nabla \times \vec{B} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}\quad (1)$$

Donde $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son los campos eléctrico y magnético respectivamente, ρ es la densidad de carga y $\vec{j}$ es la densidad de corriente.

Podemos expresar los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en término de los potenciales escalar ϕ y vectorial $\vec{A}$ en la forma,

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi; \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (2)$$

Sustituyendo estos potenciales en las ecuaciones de Maxwell, esta se reduce a dos ecuaciones acopladas de segundo orden,

¹ Profesor asociado B. Facultad de Ingeniería, UADY.
jmendez@mda.cinvestav.mx

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = -\rho \quad (3)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\vec{j}$$

Estas ecuaciones se pueden desacoplar eligiendo de forma adecuada los potenciales. Sin embargo hay que notar que si hacemos la transformación,

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Lambda$$

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (4)$$

en las ecuaciones (2), obtenemos los mismos campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ que los originales. A estas transformaciones se las conoce como transformaciones de norma y el resultado que se obtiene al aplicarlas a (2) indica que las ecuaciones de Maxwell son invariantes de norma, es decir las ecuaciones no cambian al hacer transformaciones de este tipo.

Utilizando notación covariante tenemos, $A^\mu = (\phi, \vec{A})$, $j^\mu = (\rho, \vec{j})$ donde A^μ y j^μ son cuadvectores y las ecuaciones (3) se escriben,

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = j^\mu \quad (5)$$

donde $\square$ es el D'Alembertiano definido por,

$$\square \equiv \partial^\mu \partial_\mu \equiv \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2$$

La ecuación (5) es la ecuación de onda. Podemos utilizar la invariancia de norma para restringir A^μ que, por otro lado, sin estas

restricciones A^μ no estaría completamente determinada. A la elección de la restricción se le conoce como proceso de fijar la norma. Se pueden elegir varias normas una es considerar,

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

la cual se conoce como norma de Lorentz, esta nos reduce la ecuación de onda a,

$$+ \square A^\mu = j^\mu$$

Otra posible elección es la norma de Coulomb,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

la cual nos reduce la ecuación (5) a,

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_0 A^0) = j^\mu$$

una norma más es la norma temporal o transversa definida como,

$$A^0 = 0$$

La ecuación (5) puede ser obtenida como ecuación de movimiento a partir de la densidad lagrangiana,

$$L(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu \quad (6)$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es el tensor de esfuerzos electromagnéticos dado por

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

El tensor de esfuerzos electromagnético es invariante ante transformaciones de norma $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$, por lo cual L será invariante de norma si,

$$\begin{aligned} & \int d^4 x j^\mu A_\mu \rightarrow \\ \rightarrow & \int d^4 x [j^\mu A_\mu + j^\mu \partial_\mu \Lambda] \\ & = \int d^4 x j^\mu A_\mu + \int d^4 x \partial_\mu (j^\mu \Lambda) - \\ & - \int d^4 x \partial_\mu j^\mu \Lambda \end{aligned}$$

Para que la acción $S = \int d^4 x L$ sea invariante entonces se debe cumplir que,

$$\partial_\mu j^\mu = 0 = \nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

la cual es la ecuación de continuidad de la densidad de corriente.

Además del termino anterior aparece un término extra, la integral $\int d^4 x \partial_\mu (j^\mu \Lambda)$, esta es una derivada total. Sin embargo, esta cuasi-invariancia de la densidad lagrangiana resulta en la invariancia de la lagrangiana $L = \int d^3 x \mathcal{L}$.

La norma temporal

En la norma temporal se requiere que el potencial satisfaga $A^0(x) = 0$. Dada una configuración cualquiera del campo $A^\mu(x)$, podemos obtener otro campo equivalente mediante una transformación de norma. Eligiendo,

$$\Lambda(\vec{x}, t) = \int_{t_0}^t dt' A^0(\vec{x}, t')$$

el potencial transformado A'^μ está en la norma temporal. Entonces la ecuación $A^0(x) = 0$ es admisible como condición de norma.

En la norma temporal la densidad lagrangiana adquiere la forma,

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \left[(\dot{\vec{A}})^2 - (\nabla \times \vec{A})^2 \right] - \vec{j} \cdot \vec{A}$$

La ecuación de movimiento para A^0 que resulta de la lagrangiana original (6) la imponemos como una restricción extra,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho \quad (7)$$

La cual es la conocida ley de Gauss.

Suponiendo, por simplicidad, que la densidad de corriente j^μ es constante y homogénea; que por otro lado, si no lo fuera y dependiera de x , entonces, la lagrangiana adquiriría dependencia temporal explícita. Con esta simplificación obtenemos que los grados de libertad son las componentes de $\vec{A}(x)$ y sus momentos conjugados $\vec{P} = -\vec{E}$. La densidad hamiltoniana queda,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \vec{A})^2 + \vec{j} \cdot \vec{A}$$

Con la restricción (7). Adoptamos para los corchetes de Poisson la forma canónica,

$$\{E^j(t, \vec{x}), A^k(t, \vec{y})\} = \delta^{jk} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$$

Estos corchetes, junto con $\mathcal{H}$, conducen a las ecuaciones de Maxwell.

La norma de Coulomb

La definimos mediante la condición,

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (8)$$

Cualquier configuración del campo puede llevarse a la norma temporal a través de una transformación de norma, entonces, para ver si la norma de Coulomb es admisible, basta mostrar que cualquier campo que satisfaga la norma temporal

puede transformarse a la de Coulomb. Sea V^μ el campo en la norma temporal, busquemos entonces una transformación

$$A^\mu(x) = V^\mu(x) - \partial^\mu \Lambda(x) \quad (9)$$

de tal manera que satisfaga la condición (8), con estas dos ecuaciones obtenemos que $\nabla^2 \Lambda = -\nabla \cdot \mathcal{V}$. Esta ecuación siempre tiene solución, la cual es de la forma,

$$\Lambda(x) = \frac{1}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\nabla' \cdot \mathcal{V}}{|\vec{r}' - \vec{r}|} \quad (10)$$

Por lo tanto, la norma de Coulomb es admisible.

La densidad lagrangiana (6) no contiene derivadas temporales de A^0 , por lo que esta no constituye un grado de libertad del sistema. Podemos determinar a A^0 en esta norma a partir de (9) y (10). De este modo obtenemos

$$A^0(x) = \frac{1}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\rho}{|\vec{r}' - \vec{r}|}$$

La dinámica está dada entonces por la densidad lagrangiana,

$$L(x) = \frac{1}{2} \left[(\dot{\vec{A}})^2 - (\nabla \times \vec{A})^2 \right] - \frac{1}{2} \rho \frac{1}{\nabla^2} \rho + \vec{j} \cdot \vec{A}$$

Con la restricción (8). En esta norma, la densidad lagrangiana no es manifiestamente local. Los momentos conjugados de $\vec{A}$ los obtenemos derivando la densidad lagrangiana con respecto a $\dot{\vec{A}}$, teniendo en cuenta la restricción (8). Al imponer la condición $\nabla \cdot \vec{\Pi} = 0$ resulta que,

$$\vec{\Pi} = \dot{\vec{A}} = -\vec{E}_T$$

Donde $\vec{E}_T$ es el campo eléctrico transversal. La componente longitudinal del campo eléctrico es dada por,

$$\vec{E}_L = -\nabla A^0$$

La densidad hamiltoniana en esta norma resulta así,

$$H = \frac{1}{2} \vec{\Pi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \vec{A})^2 + \frac{1}{2} \rho \frac{1}{\nabla^2} \rho - \vec{j} \cdot \vec{A}$$

En esta norma los corchetes adquieren la forma,

$$\{A^j(x), E_T^k(y)\} = \left(-\delta^{jk} + \nabla_x^j \nabla_y^k \frac{1}{\nabla^2} \right) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (11)$$

con lo que obtenemos que los corchetes de Poisson no son canónicos en esta norma. Tomando la divergencia respecto a $\vec{x}$ en ambos miembros de (11) y usando (8), obtenemos $0=0$. Es decir, en esta norma podemos usar la restricción antes de evaluar los corchetes, a diferencia de lo que ocurre en la norma temporal, en la que la restricción sobre $\nabla \cdot \vec{E}$ es de primera clase.

En la teoría cuantizada las constricciones de primera clase se imponen sobre el espacio de estados. Las de segunda clase, que pueden ser evaluadas dentro de los conmutadores, son ecuaciones de operadores. En general, el formalismo se simplifica considerablemente cuando es posible imponer las constricciones directamente sobre los operadores, como en la norma de Coulomb

REFERENCIAS

1. Méndez J. A. (2000). "Invariancia de norma y modos colectivos en mecánica cuántica". Tesis de maestría, CINVESTAV, IPN unidad Mérida.
2. Jackson J.D. (1975). "Classical Electrodynamics". John Wiley, New York.
3. Dirac P. A. M. (1964). "Lectures on quantum mechanics". Belfer graduate school of science, New York.